Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet, Operációkutatási Tanszék

A Racionális Döntések Matematikai Elemzése

Doktori értekezés

Bodó Beáta

Témavezető:
Kovács Margit
ny. egyetemi docens, a matematikai tudomány kandidátusa

Matematika Doktori Iskola

Iskola vezető:
Laczkovich Miklós, akadémikus egyetemi tanár

Alkalmazott Matematika Doktori Program

Programvezető:
Michaletzky György, az MTA doktora, egyetemi tanár

2009

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A. Motiváció

Életünkben szinte naponta döntések sorozatával kell szembenéznünk. Ha bemegyünk egy divatházba ruhát venni, akkor előttünk megjelennek alternatívaként a különböző kollekciók elemei különböző színben, fazonban, árban stb. Az azonos szempont szerint elénk rakott ruhákról könnyen el tudjuk dönteni, melyek felelnek meg az izlésünknek. De ebből következik-e, hogy az összes szempont figyelembevételével is racionálisan döntünk? Egyáltalán, mit jelent a racionalitás? És ha az eladó egy újabb szempont szerint is rak elénk egy kollekciót? Befolyásolhatja ez a korábbi döntésünket? Ha halogatjuk a döntésünket, lehet, hogy mire visszatérünk, már bizonyos kollekciók kifogytak. Mennyire változtatja meg korábbi, racionálisnak hitt választásunkat egy szempont eltűnése?

Hasonló problémák fogalmazhatók meg egy tender elbírásánál is. A pályázók, akik a lehetséges alternatívákat jelentik, a vállalandó feladat részfeladataiban különböző technológiákat alkalmazhatnak. Lehet, hogy a költségek részproblémánként másként oszlanak meg a különböző pályázatokban. Vagyis különböző szempontok szerint lehet csoportosítani a pályázatokat. Lehet, hogy két pályázó az egyik szempont szerint azonos, a másik szempont szerint különböző részcsoportba kerül. Egy adott szempont szerint azonos csoportban lévő alternatívák között viszonylag könnyű eldönteni, hogy az adott szempont szerint melyek az előnyösebbek. De vajon az egyes szempontok szerinti választás meghatározza-e azt a preferenciarendszert, ami eldönti, melyik alternatívá(ka)t kell választanunk? És ha bővítjük a szempontrendszert, vagy elhanyagolunk, vagy összevonunk bizonyos szempontokat, ez hogyan hat a döntésünkre? Ha nem tudtunk racionális döntést hozni, akkor új szempontok bevezetésével, vagy más szempontok elvetésével racionalizálható-e a döntésünk? Ha racionális volt a döntésünk, akkor az mennyire stabil, mennyire érzékeny a szempontrendszer egy-egy elemmel való változtatására? A szempontrendszer módosítása mennyire enged teret a korrupciónak?

Az ilyen és az ezekhez hasonló problémák motiválják azt a kutatást, aminek eredményeit e dolgozat következő fejezeteiben tárgyaljuk.

A problémakör vizsgálatának kezdeti szakasza a múlt század 30-as, 40-es éveiben P. A. Samuelson [40, 41, 42] nevéhez fűződik, ő vezette be az erősen kinyilvánított preferencia fogalmát, amikor arra keresett választ, hogyan lehet a fogyasztói hasznossági függvényt felépíteni a keresleti függvény ismeretéből. Néhány évvel később hasonló probléma iniciálta H. S. Houthakker [26] kutatását. Az 50-es években K. J. Arrow [6], és H. Uzawa [53] kutatásai érdemelnek említést, akik rámutattak, hogy a kinyilvánított preferencia elméletének axiomatikus megalapozása a gazdasági racionalitás szinte minden területére kihat.

A 60-as évek közepétől rohamos mértékben fejlődött a racionális döntések elmélete. E fejlődésnek megalapozója M. K. Richter [36, 37] volt, aki kidolgozta a racionalitás értelmezését a kinyilvánított preferenciák gyenge és erős axiomájával. Az ebből kiinduló, a racionális döntések axiomatikus karakterizálására irányuló kutatásokban S. A. Clark [15, 16, 17], B. Hansson [24], A. K. Sen [44, 45, 46, 47], H. Moulin [34], K. Suzumura [49, 50, 51] és társszerzői, W. Bossert és Y. Sprumont [12, 13], valamint Gy. Magyarkuti [31, 32] nevéhez fűződnek olyan meghatározó eredmények, amelyek a mi munkánkra is hatással volt.

A fent említett kutatási irány mellett a 70-es évek végén megjelent az M. A. Aizerman [1, 2, 3] és a köré csoportosult, ú.n. "orosz iskolá"-hoz (Malishevski [4, 5, 58, 5], Z. M. Lezina [60, 30], T. M. Vinogradskaya és A.A. Rubchinskii [59, 54] és I. M. Makarov et al. [61, 33]) köthető kutatási irány. Eltérően a korább említett "nyugati" kutatók munkásságától ennek az iskolának tagjai és követői nem a kinyilvánított preferenciákra alapozzák a racionalitási vizsgálataikat, hanem a különböző halmazok közti kapcsolat szerint bizonyos intuitív szabályok (mint az öröklétesség, monotonitás, útfüggetlenség stb.) alapján vizsgálják a racionalitási szabályokat.

Az irodalomjegyzékben további fontos dolgozatok adatait is megadjuk [7, 20, 22, 23, 25, 35, 38, 43, 48, 52]. Ezek a témában számos új eredményt adnak és szorosan kapcsolódnak a racionalitás matematikai elemzéséhez, de a a mi kutatásunkra nem gyakoroltak számottevő hatást.

A téma közgazdasági fontosságát talán azzal is jellemezhetjük, hogy a témában publikáló legnagyobb idézettséggel rendelkező szerzők között három közgazdasági Nobel-díjas is van, nevezetesen P. A. Samuelson (1970), K.J. Arrow (1972) és A. K. Sen (1997).

A téma közgazdasági vonatkozásain túl meg kell említenünk más területekkel való kapcsolatát is. A téma kutatása egyre jobban beépült a pszichológia (pl viselkedés-elemzés), a szociológia (pl. a társadalmi jólét elemzése), politikai tudományok (pl. választások elemzése), közvéleménykutatások területére, de megjelent az informatikai kutatásokban is (pl. keresés adatbázisokban).

B. A dolgozat szerkezete

A dolgozat bevezetésből, 4 fejezetből és irodalomjegyzékből áll.

A bevezetés ismerteti a dolgozatban felvetett és vizsgált problémák motivációit és a kapott eredmények szerkezeti elrendezését.

Az első fejezetben azokat az alapvető fogalmakat gyűjtöttük össze, amelyek fontos szerepet kapnak a dolgozatban. Ezek többsége az egyetemi tanulmányokból ismert, de vannak köztük olyanok, amelyek az irodalomban nem egységes elnevezéssel, illetve jelöléssel bírnak. Itt tisztázzuk az általunk használt terminológia és jelölésrendszert. Ebben a fejezetben vezetjük be a relációk pont→halmaz függvényreprezentációjának fogalmát és bizonyítunk vele kapcsolatban néhány alapvető állítást. Ez a fogalom a későbbi fejezetekben fontos szerepet kap.

A második fejezetben bevezetjük a döntési mechanizmus fogalmát és annak lényegi elemeit: az opcionális halmazrendszert és az azon értelmezett választási függvényt. Értelmezzük a racionalitás fogalmát, és a döntési mechanizmus által kinyilvánított Samuelson- és Richter-relációkat, a kinyilvánított preferencia axiómáit és megadjuk azok pont→halmaz függvényreprezentációját. Ennek a fejezetnek a legfontosabb eredménye egy szükséges és elégséges feltétel megfogalmazása a dominánsan racionalizálhatóságra és megadja a racionalizáló relációt annak pont→halmaz függvényreprezentációjával. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ez a reláció ekvivalens a Richter-relációval, így lényegében más technikával mi is megkapjuk azt az M. K. Richter által már bizonyított állítást, hogy ha egy valódi döntési mechanizmus pontosan akkor dominánsan racionalizálható (D-racionalizálható), ha a Richter-reláció szerint is dominánsan racionalizálható (röviden (R, D)-racionalizálható).

A harmadik fejezet a döntési mechanizmus módosíthatóságával foglakozik. Két kérdéskört vizsgálunk. Egyrészt arra keresünk feltételt, hogy mikor bővíthető az opcionális halmazrendszerünk egy újabb halmazzal úgy, hogy a kinyilvánított preferencia szerinti domináns elemei ne alkossanak üres halmazt, másrészt vizsgáljuk, milyen feltételek mellett hagyható el valamelyik halmaz az opcionális halmazrendszerből úgy, hogy a kinyilvánított preferencia megőrződjön. Bevezetjük a döntési mechanizmus döntésképességének és stabilitásának fogalmát. A döntésképesség alatt azt értjük, hogy ha a teljes alternatívahalmaz nem tartozik az opcionális halmazrendszerünkhöz, akkor ahhoz a kinyilvánított preferencia ne üres kiválasztást rendeljen. A stabilitást pedig úgy értelmezzük, hogy a kinyilvánított preferencia szerint valamennyi, az opcionális halmazrendszeren kívüli halmaznak ne legyen üres a domináns részhalmaza. Szükséges és elégséges feltételt adunk a döntésképességre és a stabilitásra. Vizsgáljuk azokat a technikákat, amelyek olyan halmazokat generálnak, amelyekkel bővíthető lesz a döntési mechanizmusunk a kinyilvánított preferencia megtartása mellett. Egy lényeges eredménye ennek a vizsgálatnak, amely megmutatja, hogy az irodalomból ismert két lezárási operátor ekvivalens.

A negyedik fejezet a kinyilvánított preferencia módosíthatóságával foglakozik abban az értelemben, hogy az opcionális halmazrendszeren ne változzon meg a kiválasztás. Algoritmust adunk a bővítés technikájára. Megmutatjuk, hogy mikor nem lehet bővíteni, és mikor van biztosan bővített preferencia. Bevezetjük a gyengén döntésképes és gyengén stabil döntési mechanizmusok fogalmát és feltétel adunk ezek létezésére.

Valamennyi fejezetben példákkal illusztráljuk a kapott állításaink egy részét.

A dolgozatot egy 61 tételből álló irodalomjegyzék zárja.

1. Alapvető fogalmak és tételek

Ebben a fejezetben összefoglaljuk azokat a fontosabb matematikai ismereteket, amelyek ugyan többnyire ismertek az egyetemi tanulmányokból, de azok terminológiájában és jelölésében az irodalom nem feltétlenül egyértelmű. Ahhoz, hogy ezen dolgozatban ne legyen félreérthető amit leírunk, igyekszünk pontosan definiálni a használt fogalmakat és a alkalmazott jelölésrendszert.

1.1. Relációk

Legyen $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ egy véges *alternatívahalmaz.*

1.1.1. Definíció.

A $P \subseteq \Omega \times \Omega$ *részhalmazt az* Ω*-n értelmezett bináris relációnak nevezzük.* Ω *a reláció értelmezési tartománya.*

A továbbiakban az $(x, y) \in P$ helyett többnyire az xPy jelölést használjuk.

Az n elemű alternatívahalmazon értelmezett P reláció reprezentálható egy $n \times n$ mátrixszal, ahol $a_{ij} = 1$, ha $x_i P x_j$, egyébként 0. A mátrixreprezentációt általában az eredmények illusztrációját szolgáló példákban fogjuk használni.

Ebben a dolgozatban P-vel, illetve az indexezett P_i-vel mindig egy tetszőleges relációt jelölünk. A későbbiekben, ha speciális tulajdonságú relációval foglalkozunk, akkor a jelölés erre feltétlenül utalni fog.

1.1.2. Definíció.

A $P \subseteq \Omega \times \Omega$ *reláció*

- komplementere *a* $\overline{P}$ *reláció, ha* $x\overline{P}y$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* xPy *nem igaz.*
- inverze *a* P^{-1} *reláció, ha* $xP^{-1}y$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* yPx*.*

- duálisa *a* P^d *reláció, ha* xP^dy *akkor és csak akkor teljesül, ha* $x\overline{P^{-1}}y$*, azaz* $y\overline{P}x$*.*
- megszorítása *egy* $X \subseteq \Omega$ *részhalmazra a* $P_{|X}$ *reláció, ha minden* $(x, y) \in X \times X$ *esetén* $xP_{|X}y$ *éppen akkor teljesül, ha* xPy *is teljesül.*

1.1.3. Definíció.

Legyen P_1 *és* P_2 *két tetszőleges bináris reláció az* $\Omega \times \Omega$ *halmazon.*

- *A* $P_1 \cup P_2$ *reláció a* P_1 *és* P_2 *relációk* uniója*, ha* $xP_1 \cup P_2y$ *pontosan akkor, ha az* xP_1y *és* xP_2y *relációk közül legalább az egyik teljesül.*
- *A* $P_1 \cap P_2$ *reláció a* P_1 *és* P_2 *relációk* metszete*, ha* $xP_1 \cap P_2y$ *pontosan akkor, ha az* xP_1y *és* xP_2y *relációk mindegyike teljesül.*
- *A* $P_1 \setminus P_2$ *reláció a* P_1 *és* P_2 *relációk* különbsége*, ha* $xP_1 \setminus P_2y$ *pontosan akkor, ha az* xP_1y *és* $x\overline{P_2}y$*, azaz* $P_1 \setminus P_2 = P_1 \cap \overline{P}_2$*.*
- xP_1P_2y *a* P_1 *és* P_2 *relációk* szorzata *(szuperpozíciója), ha* xP_1P_2y *pontosan akkor, ha létezik olyan* $z \in \Omega$*, melyre* xP_1z *és* zP_2y*.*
- P_1 implikálja P_2*-t, azaz* $P_1 \subseteq P_2$*, ha minden* $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ *esetén* xP_1y*-ből következik, hogy* xP_2y*. Ha* P_1 *implikálja* P_2*-t, akkor azt is mondjuk, hogy* P_1 gyengébb*, mint* P_2*.*

Igazak a következő állítások:

$$\overline{P_1 \cup P_2} = \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \quad \text{és} \quad \overline{P_1 \cap P_2} = \overline{P_1} \cup \overline{P_2}.$$

Továbbá, ha $P_1 \subseteq P_2$, akkor $\overline{P}_2 \subseteq \overline{P}_1$ és $P_2^d \subseteq P_1^d$.

1.1.4. Definíció.

A $P \subseteq \Omega \times \Omega$ *reláció*

- reflexív*, ha* $\forall x \in \Omega$ *esetén* xPx*;*
- irreflexív*, ha* $\forall x \in \Omega$ *esetén* $x\overline{P}x$*;*

- szimmetrikus, *ha* $\forall(x,y) \in \Omega \times \Omega$ *pontpárra* $xPy \Rightarrow yPx$*;*
- aszimmetrikus, *ha* $\forall(x,y) \in \Omega \times \Omega$ *pontpárra* $xPy \Rightarrow y\overline{P}x$*;*
- antiszimmetrikus, *ha* $\forall(x,y) \in \Omega \times \Omega$ *pontpárra* $(xPy \,\&\, yPx) \Rightarrow x = y$*.*
- teljes, *ha* $\forall(x,y) \in \Omega\times\Omega$ *pontpárra* xPy *és* yPx *közül legalább az egyik teljesül;*
- tranzitív, *ha* $P^2 \subseteq P$*, vagyis* $\forall(x,y,z) \in \Omega \times \Omega \times \Omega$ *esetén* $(xPz \,\&\, zPy) \Rightarrow xPy$*;*
- negatív tranzitív, *ha* $\overline{P}$ *tranzitív;*
- aciklikus *(vagy* körmentes*), ha minden* $1 \leqslant k \leqslant |\Omega|$ *esetén* $P^k \bigcap P^{-1} = \emptyset$*, azaz minden* $1 \leqslant k \leqslant |\Omega|$ *esetén* $[x_{i_{j-1}}Px_{i_j},\ j = 1,\dots,k] \Rightarrow x_{i_k}\overline{P}x_{i_1}$ *minden* $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ *alternatívaláncra,*
- diagonál, *ha* $\forall(x,y) \in \Omega \times \Omega$ *pontpárra* $xPy \Leftrightarrow x = y$*.*

Nyilván minden szimmetrikus reláció és minden teljes reláció reflexív és minden aszimmetrikus reláció irreflexív.

1.1.5. Definíció.

A $P \subseteq \Omega \times \Omega$ *reláció*

- aszimmetrikus része *a* P_{asym} *reláció, ha* $xP_{\mathrm{asym}}y$ *pontosan akkor, ha* xPy *és* $y\overline{P}x$*, más szóval* $P_{\mathrm{asym}} = P \cap P^d$*.*
- szimmetrikus része *a* P_{sym} *reláció, ha* $xP_{\mathrm{sym}}y$ *pontosan akkor, ha* xPy *és* yPx*, más szóval* $P_{\mathrm{sym}} = P \cap P^{-1}$*.*
- nem összehasonlítható része *a* P_{nc} *reláció, ha* $xP_{\mathrm{nc}}y$ *pontosan akkor, ha* $x\overline{P}y$ *és* $y\overline{P}x$*, más szóval* $P_{\mathrm{nc}} = \overline{P} \cap P^d$*.*

A P_{asym} *relációt a* P *által generált* szigorú preferencia-reláció*nak*[1]*, a* P_{sym} *relációt a* P *által generált* indifferencia-reláció*nak, a* P_{nc} *relációt a* P *által generált* összehasonlíthatatlansági reláció*nak is szokás nevezni.*

[1] Az irodalom gyakran az általunk szigorú preferencia-relációt nevezi (jelző nélküli) preferencia-relációnak. Mi azonban a jelző nélküli preferenciát a reláció szinonímájaként használjuk.

A fenti definíciókból nyilvánvalóan következnek az alábbi összefüggések:

$$P_{\mathrm{asym}} \cup P_{\mathrm{sym}} = P,$$

$$P_{\mathrm{asym}} \cap P_{\mathrm{sym}} = \emptyset,$$

$$P_{\mathrm{asym}} \cap P_{\mathrm{nc}} = \emptyset,$$

$$P_{\mathrm{sym}} \cap P_{\mathrm{nc}} = \emptyset,$$

$$P_{\mathrm{asym}} \cup P_{\mathrm{asym}}^{-1} \cup P_{\mathrm{sym}} \cup P_{\mathrm{nc}} = \Omega \times \Omega.$$

1.1.6. Definíció.

A $T(P)$ reláció a P reláció tranzitív lezárt*ja, ha az $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ alternatívapárra $xT(P)y$ akkor és csak akkor, ha az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:*

1. *xPy;*
2. *$x\overline{P}y$, de létezik olyan $z_i \in \Omega,\ i = 0, \ldots, k$ alternatívalánc, hogy $z_0 = x,\ z_k = y$ és $z_{i-1}Pz_i\ \forall i = 1, ..., k$.*

Nyilvánvaló, hogy $P \subseteq T(P)$ és $T(P) = P$ pontosan akkor, ha P tranzitív.

1.1.7. Definíció.

A $P \subseteq \Omega \times \Omega$ reláció

- részben rendezés*, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív;*
- teljes rendezés*, ha teljes, antiszimmetrikus és tranzitív;*
- turnament*, ha teljes és tranzitív.*

1.1.8. Definíció.

Legyen $X \subseteq \Omega$ a lehetséges alternatívák egy részhalmaza. Az $x \in X$ alternatíva az X halmaz P szerint

- felülről domináns elem*e, ha minden $y \in X$ esetén xPy.*
  Az $X \in 2^{\Omega}$ felülről domináns elemeinek halmaza

$$C_P^{\mathrm{D}}(X) = \{x \in X : xPy\ \ \forall y \in X\}. \tag{1.1}$$

- alulról domináns eleme*, ha minden $y \in X$ esetén yPx.*
  Az $X \in 2^{\Omega}$ alulról domináns elemeinek halmaza

$$C_{\mathrm{D}}^{P}(X) = \{x \in X : yPx\ \forall\, y \in X\}.$$

- felülről nem dominált eleme*, ha minden $y \in X$ esetén $y\overline{P}x$, azaz nem létezik olyan $y \in X$, melyre yPx.*
  Az $X \in 2^{\Omega}$ felülről nem dominált elemeinek halmaza

$$C_{P}^{\mathrm{ND}}(X) = \{x \in X : y\overline{P}x \ \ \forall y \in X\}. \tag{1.2}$$

- alulról nem dominált eleme*, ha minden $y \in X$ esetén $x\overline{P}y$, azaz nem létezik olyan $y \in X$, melyre xPy.*
  Az $X \in 2^{\Omega}$ alulról nem dominált elemeinek halmaza

$$C_{\mathrm{ND}}^{P}(X) = \{x \in X : x\overline{P}y \ \ \forall y \in X\}.$$

Könnyű belátni, hogy minden $X \in 2^{\Omega}$ esetén

$$\begin{aligned} C_{P}^{\mathrm{D}}(X) &= C_{P^d}^{\mathrm{ND}}(X) = C_{\mathrm{D}}^{P^{-1}}(X), \\ C_{\mathrm{D}}^{P}(X) &= C_{\mathrm{ND}}^{P^d}(X) = C_{P^{-1}}^{\mathrm{D}}(X), \end{aligned}$$

ezért a továbbiakban csak a felülről domináns és a felülről nem dominált elemek halmazával foglalkozunk megfelelő reláció választásával, így a "felülről" szó elhagyása remélhetőleg nem okoz értelmezési zavart.

Ha $P_1 \subseteq P_2$, akkor fennállnak a következő összefüggések:

$$C_{P_1}^{\mathrm{D}}(X) \subseteq C_{P_2}^{\mathrm{D}}(X) \qquad \text{és} \qquad C_{P_2}^{\mathrm{ND}} \subseteq C_{P_1}^{\mathrm{ND}}(X).$$

Megjegyezzük, hogy az irodalom a terminológia használatában nem egységes. Az angol nyelvű szakirodalom többnyire a nem dominált elemekre a "maximal/minimal" kifejezéseket használja, a domináns elemeket a "greatest/least" jelzőkkel illeti. Olyan anyanyelvű szerzőknél, akiknek a nyelve nehezen tesz különbséget a "greatest" és a "maximal" szavak fordításában (pl. orosz, német, spanyol, de ilyen a magyar nyelv is stb.) gyakran találkozunk eltérő elnevezésekkel. Az egyik ilyen lehetőség, hogy a "maximal/minimal" terminológiát használjuk az angol "greatest/least" helyett, és a "maximal/minimal" terminológia cserélődik le, pl. felülről/alulról nem dominált jelzőkre. Eddigi publikációinkban mi is ezt az utat követtük. Azonban ezen dolgozat irodalmi áttekintésében ez könnyen félreértésekre adhatott volna okot. A könnyebb áttekinthetőség érdekében a két fogalmat a magyar nyelvben szerettük volna mind az elnevezésben mind a jelölésben is egyértelműbbé tenni, ezért vettük át a fenti, - az irodalomban ugyancsak használatos - terminológiapárt.

1.2. Halmazértékű függvények

1.2.1. Definíció.

Az $\mathfrak{f} : \Omega \to 2^{\Omega}$ *leképezést pont→halmaz függvénynek*[2] *nevezzük. A*

$$\mathsf{graph}\ \mathfrak{f} = \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : y \in \mathfrak{f}(x)\} \subseteq \Omega \times \Omega$$

halmaz az $\mathfrak{f}$ *pont→halmaz függvény* gráf*ja.*

Bármely $\mathfrak{f}$ pont→halmaz függvény gráfja definiál egy $P_{\mathfrak{f}}$ relációt, nevezetesen

$$xP_{\mathfrak{f}}y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathsf{graph}\ P_{\mathfrak{f}} \Leftrightarrow y \in \mathfrak{f}(x).$$

Az $\mathfrak{f}$ pont→halmaz függvényt a $P_{\mathfrak{f}}$ reláció *pont→halmaz függvényreprezentációjá*nak nevezzük.

1.2.1. Állítás.

Ha a P *reláció pont→halmaz függvényreprezentációja* $\mathfrak{f}$*, akkor*

1. *a* $\overline{P}$ *reláció pont→halmaz függvényreprezentációja az*

   $$\bar{\mathfrak{f}}(x) = \Omega \setminus \mathfrak{f}(x) \quad \forall x \in \Omega$$

   hozzárendeléssel definiált $\bar{\mathfrak{f}}$ *pont→halmaz függvény, ahol az* $\bar{\mathfrak{f}}$ *pont→halmaz függvény az* $\mathfrak{f}$ komplementer függvény*e;*

[2]Mivel Ω diszkrét halmaz, valójában diszkrét pont→halmaz függvényről van szó. Azonban a dolgozatban kizárólag diszkrét halmazokkal és diszkrét leképezésekkel foglalkozunk, így remélhetőleg a "diszkrét" jelző elhagyása nem okoz félreértést

2. a P^{-1} reláció pont→halmaz függvényreprezentációja az

$$\mathfrak{f}^{-1}(x) = \{y \in \Omega : x \in \mathfrak{f}(y)\} \ \ \forall y \in \Omega$$

hozzárendeléssel definiált $\mathfrak{f}^{-1}$ pont→halmaz függvény, ahol az $\mathfrak{f}^{-1}$ pont→halmaz függvény az $\mathfrak{f}$ inverz kép*e;*

3. a P^d reláció pont→halmaz függvényreprezentációja az

$$\mathfrak{f}^d(x) = \{y \in \Omega : x \in \Omega \setminus \mathfrak{f}(y)\} \ \ \forall y \in \Omega$$

hozzárendeléssel definiált $\mathfrak{f}^d$ pont→halmaz függvény, ahol az $\mathfrak{f}^d$ pont→halmaz függvény az $\mathfrak{f}$ duális *függvénye.*

Bizonyítás.
1. $xP_{\bar{\mathfrak{f}}}y \Leftrightarrow y \in \bar{\mathfrak{f}}(x) \Leftrightarrow y \in \Omega \setminus \mathfrak{f}(x) \Leftrightarrow y \notin \mathfrak{f}(x) \Leftrightarrow x\overline{P}y$, vagyis $\bar{\mathfrak{f}}$ a $\overline{P}$ pont→halmaz függvényreprezentációja.

2. $xP_{\mathfrak{f}^{-1}}y \Leftrightarrow y \in \mathfrak{f}^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in \mathfrak{f}(y) \Leftrightarrow yPx \Leftrightarrow xP^{-1}y$, vagyis $\mathfrak{f}^{-1}$ a P^{-1} pont→halmaz függvényreprezentációja..

3. $xP_{\mathfrak{f}^d}y \Leftrightarrow y \in \mathfrak{f}^d(x) \Leftrightarrow x \in \Omega \setminus \mathfrak{f}(y) \Leftrightarrow y\overline{P}x \Leftrightarrow xP^dy$, vagyis $\mathfrak{f}^d$ a P^d pont→halmaz függvényreprezentációja. ♦

Megjegyezzük, hogy az irodalomban az $\mathfrak{f}(x)$, ill. $\mathfrak{f}^{-1}(y)$ halmazokat szokás a $P_\mathfrak{f}$ reláció x-, ill. y-szerinti nívóhalmazainak is nevezni.

1.2.2. Állítás.

Ha a P reláció pont→halmaz függvényreprezentációja $\mathfrak{f}$, akkor

1. *P reflexív akkor és csak akkor, ha $x \in \mathfrak{f}(x)$ $\forall x \in \Omega$;*
2. *P tranzitív akkor és csak akkor, ha bármely $(x, y, z) \in \Omega \times \Omega \times \Omega$ esetén, ha $x \in \mathfrak{f}(y)$ és $y \in \mathfrak{f}(z)$, akkor $x \in \mathfrak{f}(z)$.*

Bizonyítás.
A definíciókból közvetlenül adódik. ♦

1.1. Definíció.

A $\mathfrak{g} : 2^\Omega \to 2^\Omega, \quad \mathfrak{g}(\emptyset) = \emptyset$ *leképezést halmaz→halmaz függvénynek*[3] *nevezzük.*

A következőkben néhány halmaz→halmaz leképezést definiálunk.

Bármely $\mathfrak{f}$ pont→halmaz függvénnyel definiálhatjuk egy halmaz pontonkénti képhalmazát, mint halmaz→halmaz függvényt:

$$\mathfrak{Im}_\mathfrak{f} : 2^\Omega \setminus \emptyset \to 2^\Omega \setminus \emptyset, \;\; \mathfrak{Im}_\mathfrak{f}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{f}(x).$$

A klasszikus funkcionálanalízis egyik fontos halmaz→halmaz leképezése a lezárási operátor. Ez a fogalom motiválta a következő fogalmak bevezetését, amelyeket mi kizárólag diszkrét formában fogunk alkalmazni.

1.2.2. Definíció.

Legyen $\mathfrak{B} \subseteq 2^\Omega$. *A* $\mathrm{cl} : \mathfrak{B} \to 2^\Omega, \;\; \mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$ *operátort*

1. halmaz-kitejesztési operátor*nak nevezzük, ha* extenzív*, azaz*
   $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$;
2. monoton halmaz-kiterjesztési operátor*nak nevezzük, ha halmaz-kitejesztési operátor és*
   $A \subset B \Rightarrow \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$;
3. idempotens halmaz-kiterjesztési operátor*nak nevezünk, ha kiterjesztési operátor és*
   $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.

A monoton és idempotens halmaz-kiterjesztési operátort lezárási operátor*nak nevezzük. A* cl *halmaz-kiterjesztési operátor* injektív*, ha* $\mathrm{cl}(A) \in \mathfrak{B} \quad \forall A \in \mathfrak{B}$. *A* $\mathfrak{B}$ *halmazrendszert* cl-re zárt*nak mondjuk, ha* cl *injektív.*

Az A halmaz cl-re zárt, ha cl lezárási operátor és $A = \mathrm{cl}(A)$. cl-zárt halmazok metszete is cl-zárt.

[3] A diszkrét jelzőt itt is elhagytuk.

2. A kiválasztási függvény, mint döntési eszköz

Ebben a fejezetben áttekintjük a kiválasztási függvénnyel kapcsolatos fogalmakat, ismert tételeket. Elsősorban a téma irodalmának a mi kutatásunkhoz kapcsolódó részének a feldolgozását célozzuk meg, de néhány, az irodalomból átvett tételt általánosabb esetre is bizonyítunk, illetve néhány újabb fogalommal, és állítással is kiegészítjük azt.

2.1. Döntési mechanizmus

Jelölje 2^{Ω} az Ω alternatíva-halmaz részhalmazainak halmazát, $|\Omega|$ az Ω halmaz számosságát, és $\mathbb{N} = \{1, \ldots, |\Omega|\}$ az alternatívák indexhalmazát.

A döntési folyamat első fázisa a döntési szempontrendszer kialakítása, majd annak eldöntése, hogy az adott szempont szerint mely alternatívák hasonlíthatók össze. (Pl. ha gyümölcsöt akarok vásárolni, akkor az almát és körtét összehasonlíthatom áruk szerint, a különböző fajtájú almákat, (hasonlóan a körtéket) a saját izlésem szerint, eltarthatóságuk időtartama szerint stb.)

2.1.1. Definíció.

Az alternatíva-halmaz részhalmazainak egy $\mathfrak{B} \subseteq 2^{\Omega} \setminus \emptyset$ *részhalmaz-rendszerét* opcionális halmazrendszer*nek nevezzünk, ha a döntési eljárásban az* $X \in \mathfrak{B}$ *halmazban szereplő alternatívákat azonos szempont szerint értékeljük. A* $\mathfrak{B}$ *halmazrendszer számosságát jelölje* $|\mathfrak{B}|$ *és a* $\mathfrak{B}$ *halmazainak indexhalmazát pedig* $\mathbb{M} = \{1, \ldots, |\mathfrak{B}|\}$.

A $\mathfrak{B}$ *opcionális halmazrendszer*

- zárt a halmazegyesítésre*, ha bármely* $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ *részrendszer esetén* $\bigcup\limits_{X \in \mathfrak{B}'} X \in \mathfrak{B}$.
- lényegében zárt a halmazegyesítésre*, ha bármely* $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ *részrendszer esetén, ha* $\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{B}'} X \neq \emptyset$*, akkor* $\bigcup\limits_{X \in \mathfrak{B}'} X \in \mathfrak{B}$.

2.1.2. Definíció.

Az $X \in \mathfrak{B}$ halmazokhoz a $C : \mathfrak{B} \to 2^{\Omega}$ $C(X) \subseteq X$ hozzárendeléssel definiált halmaz→halmaz függvényt a $\mathfrak{B} \subseteq 2^{\Omega}$ halmazrendszer kiválasztási függvény*ének nevezzük.*

Ha $C : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, akkor azt mondjuk, hogy C injektív.

Az opcionális halmazrendszer valójában a kiválasztási függvény értelmezési tartománya.

A definícióból látható, hogy a kiválasztási függvény az azonos szempont szerint kezelt alternatívák közül a döntéshozó számára megfelelő alternatívákat választja ki. Meg kell jegyeznünk, hogy ugyanaz a döntéshozó különböző szempontok szerint is értékelhet, azaz az opcionális halmazrendszer különböző elemeihez is rendelhet kiválasztást, ez indokolja, miért nem a döntéshozókkal azonosítjuk az opcionális halmazrendszer elemeit.

Samuelson és Houthakker a költségvetési korlát által meghatározott kínálattal azonosította az opcionális halmazrendszer elemeit, magát a halmazrendszert pedig "büdzsé"-nek nevezték. (Innét ered a $\mathfrak{B}$ jelölés). Az opcionális halmazrendszer tehát azt jelentette náluk, hogy mit enged meg a fogyasztó számára a költségvetési korlát. A kiválasztási függvény pedig a fogyasztó mérlegelése a különböző lehetőségek között. Mi szerettük volna elkerülni azt a látszatot, hogy a fogyasztó illetve más döntéshozó kizárólag pénzben kifejezhető tulajdonságok alapján mérlegelhet, ezért nem használjuk a költségre utaló utaló elnevezést az opcionális halmazrendszerre.

2.1.3. Definíció.

A $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ struktúrát döntési mechanizmus*nak nevezzük, ha kielégíti a következő feltételeket:*

1. *Az alternatíva-halmaz számosságára $|\Omega| \geqslant 2$;*
2. *Az opcionális halmazrendszer számosságára $|\mathfrak{B}| \geqslant 1$;*
3. *A $\mathfrak{B} \subseteq 2^{\Omega} \setminus \emptyset$ opcionális halmazrendszer lefedi az Ω alternatíva-halmazt, azaz*

$$\Omega = \bigcup_{X \in \mathfrak{B}} X;$$

4. A $\mathfrak{B} \subseteq 2^{\Omega} \setminus \emptyset$ *opcionális halmazrendszer* 2^{Ω} *bármely elemét legfeljebb egyszer tartalmazza.*

Ha teljesül továbbá, hogy

5. $\mathfrak{B} = 2^{\Omega} \setminus \emptyset$,

akkor tökéletes döntési mechanizmus*ról beszélünk.*

Ha a (tökéletes) döntési mechanizmusra teljesül a

6. $C(X) \neq \emptyset \;\; \forall X \in \mathfrak{B}$

feltétel, akkor az (tökéletes) valódi döntési mechanizmus.

A 2.1.3. Definíció feltételei a reális döntés igényéből adódnak. Ugyanis, összehasonlítani legalább két elemet lehet (1.tulajdonság). Szempontok nélkül nem lehet dönteni (2.tulajdonság). Ha valamely szempontot egyik alternatíva sem tükrözi, akkor az a szempont a választás szempontjából érdektelen (3. tulajdonság), ezért ragaszkodunk az opcionális halmazrendszer definíciójában a $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ feltételhez. A 4. feltétel azt fejezi ki, hogy ha az alternatívák egy részhalmaza több szempont szerint is értékelhető, akkor ezeket a szempontokat összevontan kell kezelni. A tökéletes döntési mechanizmus egy ideális struktúra, feltételezve, hogy létezik olyan, a valós döntési problémák esetén szinte soha meg nem adható szempontrendszer, amely minden alternatíva-csoportot tud jellemezni. Végül, az 6. feltétel a döntési kényszer megfogalmazása. Ha egy alternatíva a döntés egyetlen szempontja szerint sem értékelhető, akkor ez nem valódi alternatíva, így elhagyható az Ω alternatíva-halmazból.

2.1.4. Definíció.

A $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus*

- C-re zárt*, ha bármely* $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ *részrendszer esetén, ha* $\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{B}'} C(X) \neq \emptyset$*, akkor* $\bigcup\limits_{X \in \mathfrak{B}'} X \in \mathfrak{B}$*;*
- C-injektív*, ha* C *injektív kiválasztási függvény;*

- cl-injektív*, ha* cl *injektív halmaz-kiterjesztési operátor;*
- jól definiált*, ha C-re zárt és C-injektív.*

Minden tökéletes valódi mechanizmus jól definiált.

2.2. Racionalitási fogalmak és kapcsolódó tételek

2.2.1. Definíció.

Egy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ döntési mechanizmust

- dominánsan racionálisnak*, röviden* D-racionális*nak, vagy* D-ellentmondásmentes*nek nevezünk, ha létezik egy olyan P bináris reláció az Ω alternatívahalmazon, hogy minden $X \in \mathfrak{B}$ esetén $C(X)$ az X halmaz P-szerinti domináns elemeinek $C_P^{\mathrm{D}}(X)$ halmaza, azaz*

  $$C(X) = C_P^{\mathrm{D}}(X) \ \ \forall\, X \in \mathfrak{B}.$$

- nem domináltan racionálisnak*, röviden* ND-racionális*nak, vagy* ND-ellentmondásmentes*nek nevezünk, ha létezik egy olyan P bináris reláció az Ω alternatívahalmazon, hogy minden $X \in \mathfrak{B}$ esetén $C(X)$ az X halmaz P-szerinti nem dominált elemeinek $C_P^{\mathrm{ND}}(X)$ halmaza, azaz*

  $$C(X) = C_P^{\mathrm{ND}}(X) \ \ \forall X \in \mathfrak{B}.$$

Ha konkrétan ismerjük a racionalitást biztosító P relációt, akkor a valódi döntési mechanizmust (P, D)-, ill. (P, ND)-racionálisnak nevezzük és a P relációt pedig a döntési mechanizmus racionalizálásának mondjuk.

A továbbiakban a (P, D)- vagy (P, ND)-*ellentmondásos* fogalmat 2.2.1. Definíciónak megfelelően nemcsak a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ döntési mechanizmusra fogjuk használni, ha létezik $X \in \mathfrak{B}$, melyre $C(X) \neq C_P^{\mathrm{D}}(X)$, vagy $C(X) \neq C_P^{\mathrm{ND}}(X)$, hanem magukra a szigorú tartalmazást realizáló $X \in \mathfrak{B}$ halmazokra is.

Ha a racionalizáló P reláció teljesíti a 1.1.4. Definíció valamelyik feltételét, akkor az annak megfelelő jelzővel is illethetjük mind a racionalizálást, mind a döntési mechanizmust. Tehát beszélhetünk pl. reflexív, tranzítív, teljes stb. (P, D)- vagy (P, ND)-racionalizálásról, ill. reflexív, tranzitív, teljes stb. döntési mechanizmusról. Hasonlóan, ha a racionalizáló P relációra teljesül a 1.1.7. Definíció valamelyik feltétele, akkor annak megfelelően beszélhetünk részben rendező, teljesen rendező, vagy turnament (P, D)- vagy (P, ND)-racionalizálásról, ill. rendező, teljesen rendező, vagy turnament döntési mechanizmusról.

A (P, D)- ill. (P, ND)-racionális döntési mechanizmus jelentősége az, hogy a $C_P^{\text{D}}(X)$ és a $C_P^{\text{ND}}(X)$ azokra a halmazokra is értelmezve van, amelyek nem tartoznak a $\mathfrak{B}$ halmazrendszerhez, így általuk egy nem tökéletes döntési mechanizmus tökéletessé (de nem feltétlenül valódivá) tehető anélkül, hogy az eredeti $\mathfrak{B}$-beli halmazokon megváltozna a kiválasztás. Az így kiterjesztett döntési mechanizmus röviden a $\mathfrak{D} = \{\Omega, 2^\Omega \setminus \emptyset, C_P^{\text{D}}\}$ vagy $\mathfrak{D} = \{\Omega, 2^\Omega \setminus \emptyset, C_P^{\text{ND}}\}$ struktúrával adható meg.

Speciálisan, ha a döntési mechanizmus nem injektív, akkor létezhet olyan $X \in \mathfrak{B}$, hogy $C(X) \notin \mathfrak{B}$, de a racionális döntési mechanizmus által kinyilvánított kiválasztás ekkor is megadható:

2.2.1. Lemma.

Ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (P, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, akkor

$$C_P^{\text{D}}(C_P^{\text{D}}(X)) = C_P^{\text{D}}(X) \;\; \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset. \tag{2.1}$$

Ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (P, ND)-racionális valódi döntési mechanizmus, akkor

$$C_P^{\text{ND}}(C_P^{\text{ND}}(X)) = C_P^{\text{ND}}(X) \;\; \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset. \tag{2.2}$$

Ha a $\mathfrak{D}$ valódi döntési mechanizmus C-injektív racionális, akkor

$$C(C(X)) = C(X) \;\; \forall X \in \mathfrak{B},$$

függetlenül attól, hogy a $\mathfrak{D}$ (P, D)- vagy (P, ND)-racionális.

Bizonyítás.

Mivel minden (P, ND)-racionális döntési mechanizmus (P^d, D)-racionális, így a $C_P^{\text{ND}}(C(X))$-re adott állítás a $C_P^{\text{D}}(C(X))$-re adott állítás következménye, így elég belátni a (P, D)-racionalitási feltétel melletti állítást.

A kiválasztási függvény definíciójából következik, hogy

$$C_P^{\mathrm{D}}(C_P^{\mathrm{D}}(X)) \subseteq C_P^{\mathrm{D}}(X) \qquad \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset.$$

Másrészt, ha $x \in C_P^{\mathrm{D}}(X)$, akkor xPy minden $y \in X$ esetén, vagyis xPy minden $y \in C_P^{\mathrm{D}}(X)$, azaz $x \in C_P^{\mathrm{D}}(C_P^{\mathrm{D}}(X))$. Következésképpen

$$C_P^{\mathrm{D}}(X) \subseteq C_P^{\mathrm{D}}(C_P^{\mathrm{D}}(X)) \qquad \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset.$$

Az injektív racionális $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$-re vonatkozó állítás a racionalitásból triviálisan adódik. ♦

Egy tetszőleges $x \in \Omega$ alternatívához vezessük be a következő halmazrendszereket

$$\mathfrak{B}(x) = \{X \in \mathfrak{B} : x \in X\}, \tag{2.3}$$

$$\mathfrak{B}^*(x) = \{X \in \mathfrak{B} : x \in C(X)\} \tag{2.4}$$

és a következő két pont→halmaz függvényt:

$$Z : \Omega \to 2^\Omega, \quad x \xmapsto{Z} Z(x),$$

ahol

$$\begin{aligned} Z(x) &= \bigcup\{Y : Y \in \mathfrak{B}^*(x)\} \\ &= \bigcup\{Y \in \mathfrak{B} : x \in C(Y)\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

és

$$V : \Omega \to 2^\Omega, \quad x \xmapsto{V} V(x),$$

ahol

$$\begin{aligned} V(x) &= \bigcup\{Y \setminus C(Y) : Y \in \mathfrak{B}^*(x)\} \\ &= \bigcup\{Y \setminus C(Y) : Y \in \mathfrak{B},\ x \in C(Y)\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Valamely $x \in \Omega$ esetén $Z(x) = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha x nincs kiválasztva egyetlen $\mathfrak{B}$-beli halmazból sem, azaz $x \notin C(Y)$ minden $Y \in \mathfrak{B}$.

Valamely $x \in \Omega$ esetén $V(x) = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha x vagy nincs kiválasztva egyetlen $\mathfrak{B}$-beli halmazból sem, azaz $x^* \notin C(Y)$ minden $Y \in \mathfrak{B}$, vagy ha $x \in Y$ valamely $Y \in \mathfrak{B}$ esetén, akkor $C(Y) = Y$.

Abban az esetben, ha valamely $a \in \Omega$ esetén, $Z(a) \notin \mathfrak{B}$, akkor a $Z(a)$ halmazra is csak a $C_P^{\mathrm{D}}(Z(a))$ kiválasztás adható meg.

2.2.2. Lemma.

Legyen a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy $(P, \textsc{d})$-racionális döntési mechanizmus. Akkor bármely $a \in \Omega$ alternatíva esetén a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ struktúrán a (2.5) szerint értelmezett $Z(a)$ halmazra, ha $Z(a) \neq \emptyset$, akkor

$$C_P^{\mathrm{D}}(Z(a)) = \{x \in Z(a) : Z(a) \subseteq Z(x)\}. \tag{2.7}$$

Bizonyítás.

Jelölje $W(a)$ a (2.7) jobb oldalán szereplő halmazt, azaz

$$W(a) = \{x \in Z(a) : Z(a) \subseteq Z(x)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $C_P^{\mathrm{D}}(Z(a)) \neq \emptyset$, mivel $a \in C_P^{\mathrm{D}}(Z(a))$.

Legyen $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(Z(a)) \subseteq Z(a)$. Innét

$$x^* P y \quad \forall y \in Z(a) = \bigcup_{Y \in \mathfrak{B}^*(a)} Y,$$

vagyis

$$x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{B}^*(a),$$

azaz $\mathfrak{B}^*(a) \subseteq \mathfrak{B}^*(x^*)$. Így $Z(a) \subseteq Z(x^*)$, azaz $x^* \in W(a)$.

Most tegyük fel, hogy $x^* \in W(a)$, azaz $x^* \in Z(a) \subseteq Z(x^*)$. $Z(x^*)$ definíciójából és a döntési mechanizmus $(P, \textsc{d})$-racionalitásából következik, hogy

$$x^* P y \quad \forall y \in Z(x^*),$$

de $Z(a) \subseteq Z(x^*)$, így

$$x^* P y \quad \forall y \in Z(a),$$

vagyis $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(Z(a))$, azaz $W(a) \subseteq C_P^{\mathrm{D}}(Z(a))$. ♦

2.2.1. A tökéletes döntési mechanizmus racionalitása

Bár a mi fő kutatásunk nem a tökéletes valódi döntési mechanizmusok racionalizálhatósági problémáira, hanem elsősorban a racionalitásnak az opcionális halmazrendszertől való függésére irányul, számos, a tökéletes döntési mechanizmus racionalizálhatósági kérdésére vonatkozó kutatási eredmény irányt adó lesz a mi kutatásunkban is. Másrészt, kutatásaink során néhány olyan eredmény is adódott, amelyek vagy általánosabbá teszik azok egyikét, másikát, vagy ugyanannak az eredménynek a bizonyításában teszik lehetővé az általunk alkalmazott technikát, így új bizonyítást adnak arra.

Az alábbi állítás a tökéletes döntési mechanizmus racionalizálhatóságáról megtalálható a Makarov et al. [61] ill. [33] könyvekben.

Az állítás kimondásához szükségünk van a fedőrendszer fogalmára.

2.2.2. Definíció.

Legyen $\mathfrak{B} \subseteq 2^{\Omega} \setminus \emptyset$. *Azt mondjuk, hogy* $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ *az* $X \in 2^{\Omega} \setminus \emptyset$ *halmaz* $\mathfrak{B}$-beli fedőrendszer*e, ha*

$$X \subseteq \bigcup_{Y \in \mathfrak{B}'} Y.$$

A továbbiakban az X *halmaz összes* $\mathfrak{B}$*-beli fedőrendszerének halmazát jelölje* $\mathfrak{F}(X, \mathfrak{B})$.

2.2.1. Állítás. *(*Makarov et al. [61, 33])

A $\mathfrak{D} = (\Omega, 2^{\Omega} \setminus \emptyset, C)$ *(nem feltétlenül valódi) tökéletes döntési mechanizmus akkor és csak akkor* D*-racionalizálható, ha*

$$\forall X \in 2^{\Omega} \setminus \emptyset \;\; \textit{és} \;\; \forall \mathfrak{B}' \in \mathfrak{F}(X, 2^{\Omega} \setminus \emptyset) \text{ esetén } X \setminus C(X) \subseteq X \setminus \bigcap_{Y \in \mathfrak{B}'} C(Y).$$

Bizonyítás.

Szükségesség. Tegyük fel, hogy a $\mathfrak{D} = (\Omega, 2^{\Omega} \setminus \emptyset, C)$ tökéletes döntési mechanizmus (P, D)-racionális, azaz $C(X) = C_P^{\text{D}}(X)$ minden $X \in 2^{\Omega} \setminus \emptyset$ esetén.

Tegyük fel, hogy valamely $X \in 2^{\Omega} \setminus \emptyset$ és annak valamely $\mathfrak{B}' \in \mathfrak{F}(X, 2^{\Omega} \setminus \emptyset)$ fedőrendszere esetén létezik $x^* \in X \setminus C(X)$, melyre $x^* \notin X \setminus \bigcap_{Y \in \mathfrak{B}'} C(Y)$. Az utóbbi tartalmazásból $x^* \in \bigcap_{Y \in \mathfrak{B}'} C(Y)$ adódik, vagyis $x^* \in C(Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{B}'$. Minthogy a döntési mechanizmus (P, D)-racionális, így $x^* P y \quad \forall y \in X \subseteq \bigcup_{Y \in \mathfrak{B}'} Y$. Vagyis $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(X) = C(X)$, ami ellentmond a feltevésünknek. Így $x^* \in X \setminus \bigcap_{Y \in \mathfrak{B}'} C(Y)$.

Elégségesség. Legyen $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy

$$X \subseteq \bigcup_{Y \in \mathfrak{B}'} C(Y) \quad \forall \mathfrak{B}' \in \mathfrak{F}(X, 2^\Omega \setminus \emptyset).$$

Definiáljunk egy P relációt a következőképpen:

$$xPy \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{Y \in 2^\Omega \setminus \emptyset} C(Y), \; y \in \Omega. \tag{2.8}$$

Ennek a relációnak az X halmazra való megszorítása

$$xP_{|X}y \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Big(\bigcup_{Y \in 2^\Omega \setminus \emptyset} C(Y) \Big) \bigcap X, \; y \in X. \tag{2.9}$$

Legyen $x^* \in C(X)$ tetszőlegesen választott alternatíva. Akkor P definíciója szerint $x^* P y \;\; \forall y \in X$, vagyis $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(X)$, következésképpen $C(X) \subseteq C_P^{\mathrm{D}}(X)$.

A fordított irányú tartalmazás belátásához tegyük fel indirekt, hogy

$$\exists X \in 2^\Omega \setminus \emptyset : \; x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(X), \quad \text{de} \quad x^* \notin C(X).$$

Az utóbbi tartalmazásból és a (2.9) feltételből bármely $\mathfrak{B}' \in \mathfrak{F}(X, 2^\Omega \setminus \emptyset)$ fedőrendszer esetén

$$x^* \in X \setminus C(X) \subseteq X \setminus \bigcap_{Y \in \mathfrak{B}'} C(Y),$$

azaz bármely $\mathfrak{B}' \in \mathfrak{F}(X, 2^\Omega \setminus \emptyset)$ fedőrendszer esetén létezik olyan $Y \in \mathfrak{B}'$, melyre $x^* \notin C(Y)$.

Mivel $x^* P y \;\; \forall y \in X$, P definíciója szerint $x^* \in \big(\bigcup_{Y \in 2^\Omega \setminus \emptyset} C(Y) \big) \bigcap X$, így minden $y \in X$-hez létezik $Y \subseteq \Omega$, melyre $x^* \in C(Y)$ és $y \in Y \cap X$. Vagyis

$$\mathfrak{B}' = \{ Y \subseteq \Omega : x^* \in C(Y) \quad \text{és} \quad Y \cap X \neq \emptyset \} \in \mathfrak{F}(X, 2^\Omega \setminus \emptyset).$$

Azonban $\mathfrak{B}'$ konstrukciója ellentmond annak, hogy minden fedőrendszerben van olyan halmaz, amiből x^* nincs kiválasztva. Így $C(X) = C_P^{\mathrm{D}}(X) \;\; \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$, vagyis a (2.8) formulával definiált P reláció racionalizálja $\mathfrak{D} = (\Omega, 2^{\Omega} \setminus \emptyset, C)$ tökéletes döntési mechanizmust. ♦

Az állítás a gyakorlatban valójában nem használható, mivel Ω összes részhalmazának összes fedőrendszerét elő kellene állítani. Azonban, mint a későbbiekben látni fogjuk, bizonyítása tartalmaz olyan motivációs elemet, nevezetesen a racionalizáló reláció konstrukcióját, amely a későbbiekben a nem tökéletes döntési mechanizmusok racionalizálhatóságának kezelésénél is megjelenik.

A kiválasztási függvény megadásánál a döntéshozó a kiválasztásra vonatkozóan speciális megkötéseket tehet. Ezek, a többnyire intuitívnak tűnő feltételek bizonyos értelemben ésszerűek a döntési motivációkra vonatkozóan. Közülük az alábbi kettő a nemcsak a hétköznapi értelemben vett racionalitást írja le, hanem matematikai értelemben is megadja a tökéletes döntési mechanizmus 2.2.1. Definiciónak megfelelő racionalitás szükséges és elégséges feltételét.

2.2.3. Definíció.

A $C(X)$ kiválasztási függvény

- örökítő*, ha*

$$\forall X, Y \subset \Omega : X \subset Y \Rightarrow (C(X) \cap Y) \subseteq C(Y)$$

  (**Chernoff-axióma** [14])*;*

- összehangolt*, ha*

$$\forall \mathfrak{B} \subset 2^{\Omega} \setminus \emptyset \Rightarrow \bigcap_{X \in \mathfrak{B}} C(X) \subseteq C(\bigcup_{X \in \mathfrak{B}} X).$$

A következő tétel A. K. Sentől származik, de megtalálható Makarov et al. [61, 33] könyvekben is. A mi bizonyításunk az elégségesség bizonyításánál némileg eltér a Sen féle bizonyítástól, a Makarov et al. féle bizonyítás pedig teljesen más alapokon nyugszik, nevezetesen a kiválasztási függvény logikai formáján, amit T. M. Vinogradskaya & A. A. Rubchinskii [59, 54] dolgozott ki. Mi azonban ez utóbbi témakörrel ebben a dolgozatban nem foglalkozunk.

2.2.2. Állítás. (Sen [45])

A $\mathfrak{D} = (\Omega, 2^\Omega \setminus \emptyset, C)$ (nem feltétlenül valódi) tökéletes döntési mechanizmus akkor és csak akkor D*-racionális, ha a kiválasztási függvénye kielégíti az örökletesség és az összehangoltság szabályát.*

Bizonyítás.

Szükségesség. Legyen a $\mathfrak{D}$ döntési mechanizmus D-racionális. Ekkor létezik egy P reláció, mellyel $C(X) = C_P^{\mathrm{D}}(X) \quad \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$. Legyen $X, Y \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ és $X \subseteq Y$. Ha $X \cap C(Y) = \emptyset$, akkor az örökletesség feltétele ezen a halmazpáron triviálisan teljesül. Legyen $x^* \in X \cap C(Y) = X \cap C_P^{\mathrm{D}}(Y)$ tetszőlegesen választott elem. Akkor $x^* P y \quad \forall y \in Y$ és $x^* \in X$. Mivel $X \subseteq Y$, így $x^* P y \quad \forall y \in X$, azaz $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(X) = C(X)$. Innét adódik, hogy $C(X) \supseteq X \cap C(Y)$ vagyis teljesül az örökletesség szabálya.

Legyen $\mathfrak{B}' \subseteq 2^\Omega \setminus \emptyset$ és $X = \bigcup_{Y \in \mathfrak{B}'} Y$. Ha $\bigcap_{Y \in \mathfrak{B}'} C(Y) = \emptyset$, akkor az összehangoltság feltétele triviálisan teljesül a $\mathfrak{B}'$ részrendszerre. Legyen $x^* \in \bigcap_{Y \in \mathfrak{B}'} C(Y)$. Ekkor $x^* \in C(Y) = C_P^{\mathrm{D}}(Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{B}'$, vagyis $x^* P y \quad \forall y \in X$. Ez azt jelenti, hogy $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(X)$, vagyis $\bigcap_{Y \in \mathfrak{B}'} C(Y) \subseteq X = \bigcup_{Y \in \mathfrak{B}'} Y$, azaz teljesül az összehangoltság szabálya.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy teljesül az örökletesség és az összehangoltság szabálya. Definiáljuk a P relációt a következőképpen:

$$xPy \;\Leftrightarrow y \in Z(x),$$

ahol a $Z(x)$ pont→halmaz leképezést (2.5) definiálja.

Legyen $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$. Ha $x^* \in C(X)$, akkor $X \subseteq Z(x^*)$, így $x^* P y \;\; \forall y \in X$, azaz $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(X)$. Mivel ez igaz bármely $x^* \in C(X)$ esetén, ezért $C(X) \subseteq C_P^{\mathrm{D}}(X)$.

A fordított irányú tartalmazás belátásához vegyünk egy tetszőleges $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(X)$ alternatívát. Ekkor $xPy \;\; \forall y \in X$, azaz P definíciója szerint minden $y \in X$ esetén $y \in Z(x^*)$. Innét az $X \subseteq Z(x^*)$ tartalmazás következik. Az örökletesség és az összehangoltság szabálya szerint

$$C(X) \supseteq X \cap C(Z(x^*)) = X \cap C(\bigcup_{Y \in C(X)} Y) \supseteq X \cap (\bigcup_{Y \in C(X)} Y) \ni x^*.$$

Ez igaz minden $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(X)$ esetén, ezért $C_P^{\mathrm{D}}(X) \subseteq C(X)$. A két tartalmazás együtt a $C(X) = C_P^{\mathrm{D}}(X)$ feltételhez vezet, ami igaz bármely $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$, azaz a $\mathfrak{D} = (\Omega, 2^\Omega \setminus \emptyset, C)$ valódi döntési mechanizmus P-racionális. ♦

A fenti tételnek egy nem feltétlenül tökéletes, nevezetesen a jól definiált valódi döntési mechanizmusra vonatkozó módosítása megtalálható a Kovács et al [29] dolgozatban.

A következő definícióban adunk még néhány intuitív racionalitási szabályt, ezek azonban nem a matematikai értelemben vett (ld. 2.2.1. Definíció) racionalizálhatóságot karakterizálják, hanem általában a racionalitás minőségére (teljesség, tranzitívitás stb.) adnak jellemzést. Ezen kérdésekkel itt nem foglalkozunk részleteiben, de utalunk néhány, a problémakörrel foglalkozó dolgozatra (Aizerman [1, 2, 57], Aizerman&Malishevski [4, 5, 58], Danilov&Koshevoy [18, 19], Moulin [34], Plott [35], Sen[45] stb.)

2.2.4. Definíció.

A $C(X)$ kiválasztási függvény

- erősen örökítő*, ha*

  $$\forall X, Y \subset \Omega : X \subset Y \Rightarrow (C(X) \cap Y) = C(Y)$$

  (**Arrow-axioma** [6])*;*

- komplementerfüggetlen*, ha*

  $$\forall X, Y \subset \Omega : C(X) \subseteq Y \subseteq X \Rightarrow C(Y) = C(X)$$

  (**Aizerman-feltétel** [4])*;*

- kváziösszegző*, ha*

  $$\forall X, Y \subset \Omega : C(X \cup Y) = C(C(X) \cup C(Y))$$

  (**Plott-feltétel** [35])*;*

- összegző*, ha*

  $$\forall X, Y \subset \Omega : C(X \cup Y) = C(X) \cup C(Y);$$

- multiplikatív*, ha*

$$\forall X, Y \subset \Omega : C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y);$$

- monoton*, ha*

$$\forall X, Y \subset \Omega : X \subseteq Y \& C(X) \cap C(Y) \neq \emptyset \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$$

(**Sen-feltétel** [45]).

2.2.2. A kinyilvánított racionalitás

Először azt vizsgáljuk meg, milyen feltételek mellett lesz egy nem feltétlenül tökéletes valódi döntési mechanizmus D-racionális. Erre a kérdésre M. K. Richter [36] adott választ, megadva azt a döntési mechanizmus által meghatározott relációt, ami, ha a valódi döntési mechanizmus racionalizálható, akkor racionalizálja is azt. Mi némileg más okoskodással jutunk ugyanarra az eredményre.

2.2.3. Állítás.

A $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus akkor és csak akkor* D*-racionális, ha* $\forall x^* \in \Omega$ *és* $\forall X \subseteq Z(x^*)$ *esetén, ha* $X \in \mathfrak{B}$ *és* $x^* \in X$*, akkor* $x^* \in C(X)$*.*

Bizonyítás.

Szükségesség. Tegyük fel, hogy a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus D-racionális valódi döntési mechanizmus. Akkor létezik egy P reláció úgy, hogy $C(X) = C_P^{\mathrm{D}}(X) \quad \forall X \in \mathfrak{B}$. Legyen $x^* \in \Omega$ és $X \in \mathfrak{B}$ olyan választás, hogy $x^* \in X$ és $X \subseteq Z(x^*)$. $Z(x^*)$ definíciójábóladódóan ekkor $x^* P x \quad \forall x \in Z(x^*)$, következésképpen $x^* P x \;\; \forall x \in X$, azaz $x^* \in C_P^{\mathrm{D}}(X) = C(X)$.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy $\forall x^* \in \Omega$ és $\forall X \subseteq Z(x^*)$ esetén, ha $x^* \in X$, akkor $x^* \in C(X)$.

Definiáljuk a P_Z relációt a (2.5) formulával adott Z pont$\rightarrow$halmaz függvényreprezentációval:

$$x P_Z y \;\Leftrightarrow\; y \in Z(x) \;\; \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega. \tag{2.10}$$

Legyen $X \in \mathfrak{B}$ tetszőleges. Ha $x^* \in C(X)$, akkor $X \subseteq Z(x^*)$. Ezért P_Z definíciója miatt $x^* P_Z y \quad \forall y \in X$, azaz $x^* \in C^{\mathrm{D}}_{P_Z}(X)$, ahol $C^{\mathrm{D}}_{P_Z}(X)$ az X halmaz P_Z szerinti domináns elemeinek halmazát jelöli. Mivel ez igaz minden $x^* \in C(X)$ esetén, ezért $C(X) \subseteq C^{\mathrm{D}}_{P_Z}(X)$.

Legyen most $x^* \in C^{\mathrm{D}}_{P_Z}(X)$, vagyis $x^* P_Z y \quad \forall y \in X$. P_Z definíciója szerint ekkor $y \in Z(x^*) \quad \forall y \in X$, azaz $X \subseteq Z(x^*)$. Mivel $x^* \in X$, és a feltétel szerint $x^* \in C(X)$, következésképpen $C^{\mathrm{D}}_{P_Z}(X) \subseteq C(X)$. A két tartalmazás együtt a $C^{\mathrm{D}}_{P_Z}(X) = C(X)$ feltételt adja. Mivel ez teljesül minden $X \in \mathfrak{B}$ halmazra, ezért a $\mathfrak{D}$ valódi döntési mechanizmus $(P_Z, \textsc{d})$-racionális. ♦

2.2.5. Definíció.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus. A (2.5) formulával adott Z pont→halmaz függvény gráfjával definiált P_Z relációt a $\mathfrak{D}$ által kinyilvánított gyenge racionalizálás*nak nevezzük. Azaz*

$$xP_Z y \;\Leftrightarrow\; y \in Z(x) \;\; \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega. \tag{2.11}$$

2.2.6. Definíció.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus. A (2.6) formulával adott V pont→halmaz függvény gráfjával definiált P_V relációt a a $\mathfrak{D}$ által kinyilvánított erős racionalizálás*nak nevezzük. Azaz*

$$xP_V y \;\Leftrightarrow\; y \in V(x) \;\; \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega. \tag{2.12}$$

A szakirodalom a kinyilvánított relációkkal rendkívül sokat foglalkozik. Eredetileg P. A. Samuelson nevéhez fűződik a fogalom (Samuelson [40, 41]). A másik meghatározó kinyilvánított relációt M. K. Richter vezette be (Richter [36]).

2.2.7. Definíció.

A $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ által kinyilvánított

- Richter-reláció*, az az R reláció, melyre*

$$xRy \Leftrightarrow \exists X \in \mathfrak{B} : x \in C(X), \;\; y \in X. \tag{2.13}$$

- Samuelson-reláció, *az az S reláció, melyre*

$$xSy \Leftrightarrow \exists X \in \mathfrak{B} : x \in C(X), \;\; y \in X \setminus C(X). \tag{2.14}$$

Vegyük észre, hogy a 2.2.1. Állításban a racionalitást biztosító reláció nem más, mint a $\mathfrak{D} = (\Omega, 2^{\Omega} \setminus \emptyset, C)$ döntési mechanizmus által kinyilvánított Richter-reláció, vagyis ez a reláció hallgatólagosan már a tökéletes döntési mechanizmus racionalitási feltételének meghatározásában szerepet játszott.

2.2.4. Állítás.

A $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ által kinyilvánított P_Z gyenge racionalizálás és a Richter-reláció ekvivalensek, azaz

$$xP_Zy \;\Leftrightarrow\; xRy \;\; \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega,$$

vagyis a Z leképezés a Richter-reláció pont→halmaz függvényreprezentációja.

Bizonyítás.

$xP_Zy \;\Leftrightarrow\; y \in Z(x) \;\Leftrightarrow\; \exists Y \in \mathfrak{B} : x \in C(Y), y \in Y \;\Leftrightarrow\; xRy$, azaz $P_Z = R$. ♦

2.2.5. Állítás. (Samuelson [40, 42], Suzumura [49])

Bármely $P \in \Omega \times \Omega$ relációra, ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus $(P, \textsc{d})$-racionális, akkor $R \subseteq P$. Következésképpen, ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus $(R, \textsc{d})$-racionális, akkor R a leggyengébb $\textsc{d}$-racionalizálása $\mathfrak{D}$-nek.

Bizonyítás.

A 2.2.3. Állítás bizonyítása alapján, ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus $(P, \textsc{d})$-racionalizálható, akkor (P_Z, D)-racionális, ami a 2.2.4. Állítás alapján az $(R, \textsc{d})$-racionalitással ekvivalens, azaz $R = P_Z \subseteq P$. ♦

Az R reláció pont→halmaz függvényreprezentációjával az R-ből származtatott további relációk pont→halmaz függvényreprezentációi is megadhatók.

2.2.3. Lemma.

Az R Richter-relációból származtatott $\overline{R}, R^{-1}, R^d$ relációk esetén

1. *az $\overline{R}$ pont→halmaz függvényreprezentációja*

$$\overline{Z}(x) = \Omega \setminus Z(x);$$

2. *az R^{-1} pont→halmaz függvényreprezentációja*

$$Z^{-1}(x) = \{y \in \Omega : x \in Z(y)\};$$

3. *az R^d pont→halmaz függvényreprezentációja*

$$Z^d(x) = \{y \in \Omega : x \in \Omega \setminus Z(y)\}.$$

Bizonyítás.

A 1.2.1. Állítás következménye. ♦

2.2.4. Lemma.

A $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ által kinyilvánított R Richter-reláció akkor és csak akkor reflexív, ha az alábbi két ekvivalens feltétel teljesül:

1. *$\forall x \in \Omega$ legalább egy $X \in \mathfrak{B}$ halmazból ki van választva,*

2. *$x \in Z(x)$ $\forall x \in \Omega$.*

Bizonyítás.

A Richter-reláció definíciójából és annak a Z pont→halmaz függvényreprezentációval való ekvivalenciájából triviálisan adódik. ♦

Az S reláció irreflexivitása és és az S^d reláció reflexivitása a definíciójukból nyilvánvaló.

2.2.5.1. Következmény.

Minden tökéletes valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított R reláció reflexív.

Bizonyítás.

Mivel minden $x \in \Omega$ esetén $\{x\} \in \mathfrak{B} = 2^{\Omega} \setminus \emptyset$, és a döntési mechanizmus valódisága miatt $C(\{x\}) = \{x\}$ kell legyen, így teljesül a 2.2.4. Lemma feltétele. ♦

Felvetődik az a kérdés, van-e kapcsolat az erősen kinyilvánított P_V reláció és az S Samuelson-reláció között? A pozitív választ az alábbi két állítás adja meg.

2.2.6. Állítás.

A $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *által kinyilvánított* P_V *erős racionalizálás és a Samuelson-reláció ekvivalensek, azaz*

$$xP_Vy \Leftrightarrow xSy \;\; \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega,$$

vagyis a V *leképezés a Samuelson-reláció pont→halmaz függvényreprezentációja.*

Bizonyítás.

$$xP_Vy \Leftrightarrow y \in V(x) \Leftrightarrow \exists Y \in \mathfrak{B} : x \in C(Y), y \in Y \setminus C(Y) \Leftrightarrow xSy,$$

azaz $P_V = S$. ♦

2.2.5. Lemma.

Az S *Samuelson-relációból származtatott* $\overline{S}, S^{-1}, S^d$ *relációk esetén*

1. *az* $\overline{S}$ *pont→halmaz függvényreprezentációja*

$$\overline{V}(x) = \Omega \setminus V(x);$$

2. *az* S^{-1} *pont→halmaz függvényreprezentációja*

$$V^{-1}(x) = \{y \in \Omega : x \in V(y)\};$$

3. *az* S^d *pont→halmaz függvényreprezentációja*

$$V^d(x) = \{y \in \Omega : x \in \Omega \setminus V(y)\}.$$

Bizonyítás.

A 1.2.1. Állítás következménye. ♦

A kinyilvánított R és S relációk nagy mértékben függnek a valódi döntési mechanizmust meghatározó $\mathfrak{B} \subseteq 2^\Omega$ opcionális halmazrendszertől, ill. annak halmazain megadott $C(X)$, $X \in \mathfrak{B}$ kiválasztási függvénytől.

A Richter- és Samuelson-relációk azonban nemcsak kinyilvánítottak, hanem kinyilvánítók is. Kinyilvánító erejük abban van, hogy általuk akár a C_R^{D}, akár a C_S^{ND}

kiválasztással olyan alternatíva-csoporthoz is rendelhetünk kiválasztást, amelyek a $\mathfrak{B}$ opcionális halmazrendszerben nem szerepelnek. Így fontos szerepük lesz annak vizsgálatában, hogy egy racionális valódi döntési mechanizmus opcionális halmazrendszere bővíthető-e a racionalitás és a valódiság egyidejű megtartásával. Bár a C_R^{D} és a C_S^{ND} alkalmazható bármely $X \notin \mathfrak{B}$ részhalmazra, de ebben az esetben előfordulhat, hogy $C_R^{\mathrm{D}}(X) = \emptyset$ (vagy $C_S^{\mathrm{ND}}(X) = \emptyset$), azaz egy $(R, \textsc{d})$- (vagy $(S, \textsc{nd})$-) racionális valódi döntési mechanizmus kiegészítése az $X \notin \mathfrak{B}$ halmazokkal és azokon $C_R^{\mathrm{D}}(X)$ (vagy $C_S^{\mathrm{ND}}(X)$) kiválasztással tökéletes döntési mechanizmussá, az nem lesz feltétlenül valódi döntési mechanizmus.

Másrészt a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus nem feltétlenül $(R, \textsc{d})$-racionális, sem pedig $(S, \textsc{nd})$-racionális. Azonban mindig fennállnak a következő állításban megfogalmazott tartalmazások, aminek a viszonylag egyszerű bizonyítása több szerző munkájában is megtalálható (lásd pl. Magyarkuti [31]), de fontossága miatt mi is megadjuk a bizonyítást.

2.2.7. Állítás.

Legyen adott egy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus. Akkor $\forall X \in \mathfrak{B}$ esetén

$$C_S^{\mathrm{ND}}(X) \subseteq C(X) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(X). \tag{2.15}$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy létezik $X \in \mathfrak{B}$ és $x^* \in C_S^{\mathrm{ND}}(X)$, hogy $x^* \notin C(X)$. Mivel $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, így létezik $y^* \in C(X)$, továbbá $x^* \in X \setminus C(X)$, így S definíciója szerint $y^* S x^*$. De ennek ellentmond az, hogy $x^* \in C_S^{\mathrm{ND}}(X)$, miszerint $y \overline{S} x^*$ $\forall y \in X$, így $y^* \overline{S} x^*$. Tehát $C_S^{\mathrm{ND}}(X) \subseteq C(X)$.

Legyen most $x^* \in C(X)$ egy tetszőlegesen választott $X \in \mathfrak{B}$ halmazra. A Richter reláció definíciója szerint $x^* R y$ $\forall y \in X$, azaz $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$. Ez igaz bármely $x^* \in C(X)$-re, vagyis $C(X) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(X)$. ♦

Fontos hangsúlyozni, hogy az $C_S^{\mathrm{ND}}(X) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(X)$ tartalmazás csak az opcionális halmazrendszer elemeire garantált, a $\mathfrak{B}$-n kívüli halmazokon a kétféle kiválasztás között bármilyen irányú tartalmazás lehet, még abban az esetben is, ha az adott valódi döntési mechanizmus $(R, \textsc{d})$-, de nem $(S, \textsc{nd})$-racionális. Ezt illusztrálja a 2.2.1. Példa. Ha teljesül az $R \subseteq S^d$ feltétel, akkor $C_S^{\mathrm{ND}}(X) \supseteq C_R^{\mathrm{D}}(X)$ $\forall X \notin \mathfrak{B}$.

Az (R, D)-racionalizálhatóság nem vonja maga után az egyidejű (S, ND)-racionalizálhatóságot. Ezt mutatja a 2.2.2. Példa.

Ahhoz, hogy a 2.2.7. Állításban a tartalmazások egyenlőségre cserélhetők legyenek, bizonyos feltételeket kell tennünk a kinyilvánított relációkra. Az irodalomban több ilyen feltétellel is találkozhatunk, ezek közül a leggyakrabban használtakat soroljuk itt fel. Ezek közül néhány használja a következő fogalmat:

2.2.8. Definíció.

A k-elemű $X_i \in \mathfrak{B}, \quad i = 1, \ldots, k$ *halmazsorozat* C-összefüggő, *ha*

$$X_i \cap C(X_{i+1}) \neq \emptyset \;\; \forall i = 1, \ldots, k-1 \quad \text{és} \quad X_k \cap C(X_1) \neq \emptyset.$$

2.2.9. Definíció.

A kinyilvánított preferencia axiómái:

- Gyenge kongruencia axiómája[4]*:*

  WCA: $\forall X \in \mathfrak{B}$, *ha* $xRy,\ y \in C(X),\ x \in X \;\Rightarrow\; x \in C(X)$;
  (Richter [36])

- Erős kongruencia axiómája[5]*:*

  SCA: $\forall X \in \mathfrak{B}$, *ha* $xT(R)y,\ y \in C(X),\ x \in X \;\Rightarrow\; x \in C(X)$*;*
  (Richter [36])

- Kinyilvánított preferencia gyenge axiómái[6]*:*

  WARP(a): $S \subseteq R^d$ *(vagy ami vele ekvivalens:* $R \subseteq S^d$*);*
  (Samuelson [42])

  WARP(b): $S = R_{\text{asym}}$*;*
  (Magyarkuti [31])

[4] a jelölés az angol "Weak Congruence Axiom" kifejezés rövidítése
[5] a jelölés az angol "Strong Congruence Axiom" kifejezés rövidítése
[6] a jelölések az angol "Weak Axiom of Revealed Preferences" és a "Hanson's Axiom of Revealed Preferences" kifejezések rövidítései

WARP(c): *Minden kételemű C-összefüggő halmazsorozatra*
$X_1 \cap C(X_2) = C(X_1) \cap X_2$;
(Suzumura [49])

- Kinyilvánított preferencia erős axiómái[7]*:*

SARP(a): $T(S) \subseteq R^d$*;*
(Richter [36])

SARP(b): *Minden $X_i, i = 1, \ldots, k$ C-összefüggő halmazsorozathoz léteznek olyan $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, melyre*
$X_i \cap C(X_{i+1}) = C(X_i) \cap X_{i+1}$.
(Hansson [24])

HARP: *Minden $X_i, i = 1, \ldots, k$ C-összefüggő halmazsorozatra*
$X_i \cap C(X_{i+1}) = C(X_i) \cap X_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, k-1$;
(Hansson [24])

A fenti feltételek azonban korántsem függetlenek. Az alábbi állításban megadjuk a köztük az ekvivalenciákat, de a bizonyításukat elhagyjuk, mivel a továbbiakban csak kettőt használunk közülük. Viszont az ekvivalencijeleknél feltüntetjük azoknak a dolgozatoknak a hivatkozását, ahol ezek bizonyítása megtalálható.

2.2.8. Állítás.

1. $WCA \overset{[37]}{\Longleftrightarrow} WARP(a) \overset{[31]}{\Longleftrightarrow} WARP(b)$

$\Updownarrow$ [49]

$WARP(c)$

2. $SCA \overset{[37]}{\Longleftrightarrow} SARP(a) \overset{[49]}{\Longleftrightarrow} SARP(b)$

$\Updownarrow$ [49]

$HARP$

[7] a jelölések az angol "Strong Axiom of Revealed Preferences" kifejezés rövidítéséből

A fenti ekvivalenciák tükrében mi a továbbiakban a WARP(a) és a SARP(a) feltételeket használjuk a kinyilvánított preferenciák gyenge, ill. erős axiómájaként.

A következő lemma a WARP pont→halmaz függvényreprezentációját adja meg.

2.2.6. LEMMA.

Az R Richter- és az S Samuelson-relációkra teljesül a WARP feltétel, akkor az

1. *$S \subseteq R^d$ implikáció ekvivalens az $V(x) \subseteq \{y \in \Omega : x \notin Z(y)\}$ tartalmazással;*
2. *$R \subseteq S^d$ implikáció ekvivalens az $Z(x) \subseteq \{y \in \Omega : x \notin V(y)\}$ tartalmazással.*

Bizonyítás.

A 2.2.4., 2.2.3., 2.2.6. és 2.2.5. Állítások következménye. ♦

A WARP ismeretében most már választ adhatunk arra a kérdésre, mikor cserélhető (2.15) formulában mindkét tartalmazás egyenlőségre, ami a döntési mechanizmusok racionalizálhatósági problémái között az egyik legalapvetőbb kérdés volt.

2.2.9. ÁLLÍTÁS. (Richter [36], Suzumura [49], Clark [15], Magyarkuti [31])

Legyen adott egy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus, R és S a $\mathfrak{D}$ által kinyilvánított Richter és Samuelson relációk. Akkor $\forall X \in \mathcal{B}$ esetén

$$R \subseteq S^d \Leftrightarrow C_S^{ND}(X) = C(X) = C_R^{\mathrm{D}}(X). \tag{2.16}$$

A WARP ismeretében a $P = R$ esetén a 2.2.1. Lemma a következőképpen fogalmazható át:

2.2.7. LEMMA.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus, R és S a $\mathfrak{D}$ által kinyilvánított Richter- és Samuelson- relációk, és tegyük fel, hogy teljesül az $R \subseteq S^d$ feltétel. Akkor

$$C_S^{\mathrm{ND}}(X) = C_S^{\mathrm{ND}}(C_S^{\mathrm{ND}}(X)) = C_R^{\mathrm{D}}(C_R^{\mathrm{D}}(X)) = C_R^{\mathrm{D}}(X) \qquad \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$$

Megmutatjuk, hogy a 2.2.2. Lemmában a $C(Z(a))$ halmazra kapott (2.7) formula a $P = R$ esetben akkor is érvényben marad, ha a döntési mechanizmus nem feltétlenül (R, D)-racionális. Erre az állításra kétféle bizonyítást is adunk, az egyik a Richter-reláció eredeti definícióján, a másik a pont→halmaz függvényreprezentációján alapszik. Ez utóbbi bizonyítás arra is rámutat, hogy a relációk pont→halmaz függvényreprezentációja mennyire leegyszerűsíti a bizonyítást.

2.2.8. Lemma.

Bármely $a \in \Omega$ alternatíva esetén a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ struktúrán a (2.5) szerint értelmezett $Z(a)$ halmazra

$$C_R^{\text{D}}(Z(a)) = \{x \in Z(a) : Z(a) \subseteq Z(x)\}, \tag{2.17}$$

ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ által kinyilvánított R Richter-reláció reflexív.

1. Bizonyítás.

A reflexivitás garantálja, hogy $Z(a) \neq \emptyset$. Ha a (2.17) formula két oldalán szereplő halmazok közül bármelyik nem üres, akkor a következő ekvivalencialánc érvényes:

$$\begin{gathered}
x^* \in C_R^{\text{D}}(Z(a)) \\
\Leftrightarrow \\
x^* R y \quad \forall y \in Z(a) \\
\Leftrightarrow \\
\forall y \in Z(a) \ \ \exists X_y \in \mathfrak{B} : x^* \in C(X_y), \ \ y \in X_y \\
\Leftrightarrow \\
Z(a) \subseteq \bigcup \{X_y : y \in Z(a)\} \ \ \text{és} \ \ x^* \in \bigcap \{C(X_y) : y \in Z(a)\} \\
\Leftrightarrow \\
Z(a) \subseteq \bigcup \{X_y : y \in Z(a)\} \ \ \text{és} \ \ X_y \subseteq \bigcup \{Y \in \mathfrak{B} : x^* \in C(Y)\} \ \ \forall y \in Z(a) \\
\Leftrightarrow \\
Z(a) \subseteq \bigcup \{X_y : y \in Z(a)\} \subseteq \bigcup \{Y \in \mathfrak{B} : x^* \in C(Y)\} = Z(x^*) \\
\Leftrightarrow \\
x^* \in \{x \in Z(a) : Z(a) \subseteq Z(x)\}.
\end{gathered}$$

♦

2. Bizonyítás.

Ennek a bizonyításnak az alapja annak felismerése, hogy Z éppen az R reláció pont→halmaz függvényreprezentációja. A reflexivitás garantálja, hogy $Z(a) \neq \emptyset$. Ha a (2.17) formula két oldalán szereplő halmazok közül bármelyik nem üres, akkor az állítást a következő ekvivalencialánc bizonyítja:

$$\begin{gathered} x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(Z(a)) \\ \Leftrightarrow \\ x^* R y \;\; \forall y \in Z(a) \\ \Leftrightarrow \\ y \in Z(x^*) \;\; \forall y \in Z(a) \\ \Leftrightarrow \\ Z(a) \subseteq Z(x^*) \\ \Leftrightarrow \\ x^* \in \{x \in Z(a) : Z(a) \subseteq Z(x)\}\,. \end{gathered}$$ ♦

A fenti lemma még nem garantálja, hogy $C_R^{\mathrm{D}}(Z(a)) \neq \emptyset$ minden $a \in \Omega$.

Hasonló állítás fogalmazható meg az S^d reláció pont→halmaz függvényreprezentációjára:

2.2.9. Lemma.

$C_S^{\mathrm{ND}}(V^d(x)) = \{x \in V^d(x) : V^d(x) \subseteq V^d(y)\}$.

Bizonyítás.

$$\begin{gathered} x^* \in C_S^{\mathrm{ND}}(V^d(x)) \\ \Leftrightarrow \\ x^* S^d y \;\; \forall y \in V^d(x) \\ \Leftrightarrow \\ y \in V^d(x^*) \;\; \forall y \in V^d(x) \\ \Leftrightarrow \\ V^d(x) \subseteq V^d(x^*) \\ \Leftrightarrow \\ x^* \in \left\{y \in V^d(x) : V^d(x) \subseteq V^d(y)\right\}. \end{gathered}$$ ♦

2.2.3. Példák

2.2.1. Példa.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, ahol $\Omega = \{a, b, c, d\}$. A 1. Táblázat definiálja a döntési struktúrát (1. és 2. oszlop a vonalig), a kinyilvánított $C_R^{\mathrm{D}}(X)$ és $C_S^{\mathrm{ND}}(X)$ kiválasztásokat (3. és 5. oszlop). A vonal alatti rész a nem $\mathfrak{B}$-beli halmazokra adja meg a kinyilvánított kiválasztásokat és a köztük lévő tartalmazási irányt (4. oszlop). A kinyilvánított Richter- és Samuelson-relációkat a 2. Táblázat adja.

1. Táblázat.

X	$C(X)$	$C_R^{\mathrm{D}}(X)$		$C_S^{\mathrm{ND}}(X)$
$a\ b$	$a\ b$	$a\ b$	$\supset$	
$a\ b\ c$	$b\ c$	$b\ c$	$\supset$	c
$b\ c\ d$	$c\ d$	$c\ d$	$=$	$c\ d$
$a\ c$		c	$=$	c
$b\ c$		$b\ c$	$\supset$	c
$a\ b\ c\ d$		c	$\subset$	$c\ d$

A 2.2.1. Példa döntési struktúrája

2. Táblázat.

R	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	1	0
c	1	1	1	1
d	0	1	1	1

A 2.2.1. Példához tartozó Richter-reláció

S	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	0	0
c	1	1	0	0
d	0	1	0	0

A 2.2.1. Példához tartozó Samuelson-reláció

Látható, hogy $\mathfrak{D}$ egy (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, de $R \nsubseteq S^d$. A táblázat alsó feléből kiolvashatjuk, hogy $C_S^{\text{ND}}(X)$ és $C_R^{\text{D}}(X)$ között különböző irányú tartalmazások lehetnek különböző $X \notin \mathfrak{B}$ esetén.

2.2.2. PÉLDA.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, ahol az $\Omega = \{a, b, c, d\}$. A $\mathfrak{B}$ halmazrendszer elemei, és az azokhoz tartozó kiválasztás, továbbá a kinyilvánított R és S relációk a 3. Táblázatban adottak.

3. Táblázat.

$X \in \mathfrak{B}$	$C(X)$
a b	a
b c	b c
b c d	c d

A 2.2.2. Példa döntési struktúrája

R	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	0	1	1	0
c	0	1	1	1
d	0	1	1	1

A 2.2.2. Példához tartozó Richter-reláció

S	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	0	0
c	0	1	0	0
d	0	1	0	0

A 2.2.2. Példához tartozó Samuelson-reláció

Ez a döntési mechanizmus (R, D)-racionális, de nem (S, ND)-racionális, mert

$$C(X) = C_R^{\text{D}}(X) \quad \forall X \in \mathfrak{B},$$

de

$$\{b, c\} = C(\{b, c\}) = C_R^{\text{D}}(\{b, c\}) \neq C_S^{\text{ND}}(\{b, c\}) = \{c\}.$$

3. A valódi döntési mechanizmus módosíthatósága

Ebben a fejezetben 2 kérdéskört vizsgálunk.

1. Milyen feltételek mellett nem változik meg a kinyilvánított Richter-reláció, ha az alternatíva-halmaz egy új részhalmazát a $\mathfrak{B}$ halmazrendszerhez kapcsoljuk valamilyen kiválasztással? Mikor nem jelennek meg a döntési mechanizmusban újabb ellentmondások, vagyis ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus $(R, \textsc{d})$-racionális volt, akkor mi a feltétele, hogy az is maradjon, ha pedig a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus nem volt $(R, \textsc{d})$-racionális, akkor a $C(X) \subset C_R^{\mathrm{D}}(X)$ szigorú tartalmazás milyen feltételek mellett marad továbbra is csak azokra az $X \in \mathfrak{B}$ halmazokra érvényben, amelyekre a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ esetében is teljesült?

2. Milyen feltételek mellett hagyható el az opcionális halmazrendszer valamelyik eleme úgy, hogy a szűkített új struktúrán a kinyilvánított Richter-reláció ne változzon? Mikor tekinthető egy szempont a racionalitás szempontjából redundánsnak?

3.1. A valódi döntési mechanizmus Richter-relációt megtartó bővíthetősége

Ebben az alfejezetben a fejezet bevezetésében felvetett első kérdéskört vizsgáljuk. Ebben a megközelítésben természetesnek tűnik, hogy az opcionális halmazrendszerbe bevont új halmazhoz az R-szerinti domináns elemek halmazát rendeljük kiválasztásként.

3.1.1. Definíció.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, R az általa kinyilvánított

Richter-reláció és $\emptyset \neq X' \in 2^\Omega \setminus \mathfrak{B}$. *A*

$$\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B} \cup \{X'\} \tag{3.1}$$

$$C'(X) = \begin{cases} C(X), & \textit{ha } X \in \mathfrak{B}, \\ C_R^{\mathrm{D}}(X), & \textit{ha } X \in 2^\Omega \setminus \mathfrak{B}. \end{cases} \tag{3.2}$$

opcionális halmazzal és kiválasztási függvénnyel definiált $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ *struktúrát a* $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus* X'*-vel való* R-tartó bővítés*ének nevezzük.*

3.1.1. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy valódi döntési mechanizmus. A bővített* $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B} \cup \{X'\}$ *opcionális halmazrendszeren az (3.1) és (3.2) feltételekkel definiált* $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ *struktúrán kinyilvánított* R^+ *Richter-reláció megegyezik az eredeti* $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *struktúrán kinyilvánított* R *Richter-relációval.*

Bizonyítás.

Megmutatjuk, hogy $R = R^+$. Valóban, xR^+y pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $Y \in \mathfrak{B}^+$, hogy $x \in C(Y)$ és $y \in Y$. Ez kétféleképpen teljesülhet. Vagy létezik $Y \in \mathfrak{B}$, hogy $x \in C(Y)$ és $y \in Y$, vagyis xRy, vagy $x \in C'(X') = C_R^{\mathrm{D}}(X')$ és $y \in X'$ amiből ismét xRy adódik. ♦

A fenti állítás azt garantálja, hogy a 3.1.1. Definíció szerinti bővítéssel újabb ellentmondás nem kerül a rendszerbe (vagyis pontosan azokra az $X \in \mathfrak{B}$ halmazokra teljesül a $C'(X) \subset C_R^{\mathrm{D}}(X)$ feltétel, amelyekre a bővítés előtt is teljesült). Ha tehát a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ (R, D)-racionális volt, akkor a $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ is az lesz. Ilyenkor a 3.1.1. Definícióban a (3.2) előállítás helyett egységesen írhatjuk, hogy

$$C'(X) = C_R^{\mathrm{D}}(X) \;\; \forall X \in \mathfrak{B}^+.$$

A fenti bővítéssel azonban nem feltétlenül kapunk valódi döntési mechanizmust. Ehhez még az is szükséges hogy a $C_R^{\mathrm{D}}(X') \neq \emptyset$ feltétel is teljesüljön. Erre ad szükséges és elégséges feltételt a következő állítás.

3.1.2. Állítás.

A $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus 3.1.1. Definíció szerinti* $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ *bővítése az* X' *halmazzal pontosan akkor lesz valódi döntési mechanizmus, ha létezik az opcionális halmazrendszernek olyan* $\emptyset \neq \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ *részrendszere, hogy*

$$X' \subseteq \bigcup_{X \in \mathfrak{B}'} X, \tag{3.3}$$

azaz $\mathfrak{B}' \in \mathfrak{F}(X', \mathfrak{B})$ *és*

$$X' \bigcap \left(\bigcap_{X \in \mathfrak{B}'} C(X) \right) \neq \emptyset. \tag{3.4}$$

Bizonyítás.

Szükségesség. Ha a $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ valódi döntési mechanizmus, akkor teljesül a $C'(X) \neq \emptyset \ \ \forall X \in \mathfrak{B}^+$ feltétel, így $C'(X') = C_R^{\mathrm{D}}(X') \neq \emptyset$.

Legyen $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X')$. Ekkor minden $x \in X'$ esetén fennáll az $x^* R x$ reláció. Az R reláció (2.13) definíciója szerint minden $x \in X'$ elemhez létezik olyan $X \in \mathfrak{B}$, hogy $x^* \in C(X)$ és $x \in X$. Jelölje ezen X halmazok rendszerét $\mathfrak{B}'$. Ezek a halmazok együttesen lefedik az X' halmazt, azaz $X' \subseteq \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{B}'} X$, másrészt $x^* \in \bigcap\limits_{X \in \mathfrak{B}'} C(X)$, tehát teljesül az $X' \bigcap (\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{B}'} C(X)) \neq \emptyset$ feltétel is.

Elégségesség. A valódi döntési mechanizmus definíciójában szereplő 1.-4. feltételek triviálisan teljesülnek, így elegendő belátnunk a 6. feltétel teljesülését az X' halmazra (a többire (3.2) miatt automatikusan teljesül, mivel $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus).

Tegyük fel, hogy létezik a tételben megkívánt $\emptyset \neq \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ halmazrendszer és válasszunk tetszőleges $x^* \in X' \bigcap (\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{B}'} C(X))$ alternatívát. Ekkor $x^* \in X'$. Másrészt $x^* \in \bigcap\limits_{X \in \mathfrak{B}'} C(X)$, azaz $x^* \in C(X) \ \forall X \in \mathfrak{B}'$. Innét az R reláció (2.13) definíciója szerint $x^* R x \ \forall x \in X$ és $\forall X \in \mathfrak{B}'$ esetén. Vagyis $x^* R x \ \forall x \in \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{B}'} X$. Mivel $X' \subseteq \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{B}'} X$, így $x^* R x \ \ \forall x \in X'$, vagyis $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X')$, következésképpen $C_R^{\mathrm{D}}(X') \neq \emptyset$. ♦

A 3.1.1. Állítást követő megjegyzés szerint a $C'(X') = C_R^{\mathrm{D}}(X')$ definícióval újabb ellentmondás nem került a rendszerbe, de ha $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ ellentmondásos volt, akkor a $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ is az maradt.

3.1.2.1. Következmény.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus. Ennek az 3.1.1. Definíció szerinti $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ valódi döntési mechanizmussá való bővítése ekvivalens a $\mathfrak{D}'' = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C'')$ bővítéssel, ahol

$$C''(X') = \begin{cases} C(X'), & \textit{ha } X' \in \mathfrak{B} \\ \{x \in X' :\ \exists \emptyset \neq \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B} & \\ \qquad \textit{melyekre } x \in \bigcap\limits_{X \in \mathfrak{B}'} C(X) & \\ \qquad \textit{és } X \subseteq \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{B}'} X\} \neq \emptyset, & \textit{ha } X' \in 2^{\Omega} \setminus \mathfrak{B}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Bizonyítás.

A jobb és bal oldali halmazok közti két irányú tartalmazás a 3.1.2. Állítás szükségességét és elégségességét bizonyító rész következménye. ♦

A fenti állítás és következményének alkalmazásában a nehézséget egyrészt a fedőrendszer megtalálása okozza, másrészt az állítás feltételeinek több fedőrendszer is megfelelhet. Célszerű lenne a megvizsgálandó fedőrendszerek számát minimalizálni. Ezt teszi lehetővé az alábbi állítás.

3.1.3. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus és legyen $X \in 2^{\Omega} \setminus \emptyset$. $C_R^{\mathrm{D}}(X) \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha létezik $x^* \in X$, amelyre $X \subseteq Z(x^*)$. Ekkor $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$.

Bizonyítás.

Szükségesség. Legyen $C_R^{\mathrm{D}}(X) \neq \emptyset$ és $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$. Akkor $x^* R y \ \ \forall y \in X$. Ez az R pont→halmaz függvényreprezentációjával azt jelenti, hogy minden $y \in X$ esetén $y \in Z(x^*)$, vagyis $X \subseteq Z(x^*)$.

Elégségesség. Most tegyük fel, hogy $x^* \in X$ olyan alternatíva, hogy az $X \subseteq Z(x^*)$ tartalmazás teljesül. Akkor $x^* Ry \quad \forall y \in Z(x^*)$. Következésképpen $x^* Ry \quad \forall y \in X$, azaz $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$. ♦

Ha $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ nem (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, akkor előfordulhat, hogy valamely $X \in \mathfrak{B}$ esetén $x^* \notin C(X)$.

A 3.1.3. Állítás alkalmazásakor legfeljebb $|\Omega|$ számú, konkrétan meghatározott halmazon kell ellenőrizni a feltétel teljesülését. Ugyanis a 3.1.3. Állítás követelményét kielégítő $Z(x^*)$ halmazt definiáló $\mathfrak{B}^*(x^*)$ halmazrendszer teljesíti a 3.1.2. Állításban szereplő fedőrendszertől megkívánt tulajdonságokat.

Összevetve a 2.2.3. Állítást a 3.1.3. Állítással arra a következtetésre jutunk, hogy ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus (R, D)-racionális, akkor a $\tilde{\mathfrak{D}} = (\Omega, \tilde{\mathfrak{B}}, C')$ is az, ahol

$$\mathfrak{B} \subset \tilde{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{B} \cup \{X \notin \mathfrak{B} : C_R^{\mathrm{D}}(X) \neq \emptyset\} \tag{3.6}$$

$$C'(X) = \begin{cases} C(X), & \text{ha } X \in \mathfrak{B}, \\ C_R^{\mathrm{D}}(X), & \text{ha } X \in \tilde{\mathfrak{B}} \setminus \mathfrak{B}. \end{cases} \tag{3.7}$$

3.1.4. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus és R az általa kinyilvánított Richter-reláció. Ha létezik $x^* \in \Omega$ alternatíva úgy, hogy teljesül a

$$\emptyset \neq Z(x^*) \notin \mathfrak{B} \tag{3.8}$$

feltétel, akkor a $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B} \cup \{Z(x^*)\}$ opcionális halmazrendszeren a (3.2) kiválasztási függvénnyel definiált $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ struktúra szintén valódi döntési mechanizmus lesz. Ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, akkor a $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ is az.

Bizonyítás.

A valódi döntési mechanizmus definíciójában szereplő 1.- 4. feltételek triviálisan teljesülnek, így elegendő belátnunk a 6. feltétel teljesülését az $Z(x^*)$ halmazra (a többire a 3.1.1. Definíció miatt automatikusan teljesül, mivel $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus).

Mivel $Z(x^*) \neq \emptyset$, ezért $x^* \in Z(x^*)$, így $C_R^{\mathrm{D}}(Z(x^*))$ (2.17) szerinti előállítása miatt $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(Z(x^*))$, így $C_R^{\mathrm{D}}(Z(x^*)) \neq \emptyset$.

Az R-tartó bővítés definíciójából már következik, hogy a bővített $\mathfrak{D}^+$ struktúra is valódi döntési mechanizmus lesz, és megtartja az eredeti döntési mechanizmus racionalitását. ♦

Megjegyezzük, hogy a (3.8) feltétel csak akkor teljesíthető, ha a $\mathfrak{B}$ opcionális halmazrendszer halmazai közül legalább két Y halmaz teljesíti az $x^* \in C(Y)$ feltételt.

3.1.5. ÁLLÍTÁS.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus és R az általa kinyilvánított Richter-reláció. Ha létezik olyan $X \in \mathfrak{B}$ halmaz, amelyhez tartozó $C(X)$ kiválasztásra $C(X) \notin \mathfrak{B}$, akkor a $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B} \cup \{C(X)\}$ opcionális halmazrendszeren a (3.2) kiválasztási függvénnyel definiált $\mathfrak{D}^+ = (\Omega, \mathfrak{B}^+, C')$ struktúra szintén (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus lesz.

Bizonyítás.

Mivel $\mathfrak{D}$ egy (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, az (R, D)-racionalitás miatt $C_R^{\mathrm{D}}(C(X)) = C(X) \neq \emptyset \ \ \forall X \in \mathfrak{B}$. Így az R-tartó bővítés szabálya szerint a bővített struktúra is valódi döntési mechanizmus, amely megtartja az eredeti valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított Richter-relációt. ♦

3.1.5.1. KÖVETKEZMÉNY.

Bármely $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ nem C-injektív (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus C-injektív (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmussá tehető R-tartó bővítések sorozatával.

Bizonyítás.

Triviális. ♦

3.2. Az opcionális halmazrendszert bővítő halmaz-kiterjesztési operátorok

A korábbi fejezetben azt vizsgáltuk, milyen feltételek mellett lehet az opcionális halmazrendszert bővíteni, hogy a racionalitást bizonyos értelemben megőrizzük. Most azt vizsgáljuk, milyen módszerekkel választhatunk a bővítő halmazok között. További R-tartó bővítéseket nyerhetünk az úgynevezett halmaz-kiterjesztési operátorok segítségével.

3.2.1. Az $\mathfrak{f}_P$-szerinti halmaz-kiterjesztések

Legyen P egy reflexív reláció az $\Omega \times \Omega$-n és $\mathfrak{f}_P$ ennek pont→halmaz függvényreprezentációja, $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ pedig $\mathfrak{f}_P$ képfüggvénye, mint halmaz→halmaz függvény.

3.2.1. ÁLLÍTÁS.

Az $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ leképezés egy monoton halmaz-kiterjesztési operátor. Ha P még tranzitív is, akkor $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ lezárási operátor.

Bizonyítás.

Az nyilvánvaló $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ definíciójából, hogy $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(\emptyset) = \emptyset$.

Az első állításhoz azt kell belátnunk, hogy az $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ leképezés extenzív és monoton.

Legyen $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ és $x^* \in X$. R reflexivitása miatt $x^* \in \mathfrak{f}_P(x^*)$, következésképpen $x^* \in \bigcup\limits_{x \in X} \mathfrak{f}_P(x) = \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X)$. Mivel x^* megválasztása az X halmazból tetszőleges volt, így $X \subseteq \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X)$. Ez teljesül minden $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ esetén, tehát $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ extenzív.

Legyen $X \subseteq Y, \quad X, Y \in 2^\Omega \setminus \emptyset$.

$$\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(Y) = \bigcup_{y \in Y} \mathfrak{f}_P(y) = (\bigcup_{y \in X} \mathfrak{f}_P(y)) \bigcup (\bigcup_{y \in Y \setminus X} \mathfrak{f}_P(y)) \supseteq \bigcup_{y \in X} \mathfrak{f}_P(y) = \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X).$$

Ez igaz bármely X, Y halmazpárra a $2^\Omega \setminus \emptyset$ halmazrendszerből, így $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ monoton.

Tegyük fel most P tranzitivitását is. Az $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) \subseteq \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X))$ tartalmazás a monotonitás miatt fennáll minden $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ esetén.

Az ellenkező irányú tartalmazás belátásához tegyük fel, hogy $x^* \in \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X))$ tetszőlegesen választott alternatíva. Akkor

$$\begin{aligned} x^* \in \bigcup_{y \in \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X)} \mathfrak{f}_P(y) \quad &\Rightarrow \quad \exists y^* \in \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) : x^* \in \mathfrak{f}_P(y^*) \\ &\Rightarrow \quad \exists u \in X \text{ és } y^* \in \mathfrak{f}_P(u) : x^* \in \mathfrak{f}_P(y^*). \end{aligned}$$

Az utolsó sorból a tranzitivitást felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\exists u \in X : x^* \in \mathfrak{f}_P(u), \quad \text{azaz} \quad x^* \in \bigcup_{x \in X} \mathfrak{f}_P(x) = \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X).$$

Ez igaz minden $x^* \in \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X))$, ezért $x^* \in \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X)) \subseteq \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X)$. A két tartalmalmazás $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X)) = \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X)$ egyenlőséghez vezet $\forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ esetén, azaz $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ idempotens, ami szükséges volt ahhoz, hogy $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ lezárási operátor legyen. ♦

Vezessük be a következő operátort (Kortelainen [27]):

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_P : 2^\Omega \to 2^\Omega \\ &X \overset{\mathcal{H}_P}{\longmapsto} \mathcal{H}_P(X) = \{x \in \Omega : \exists y \in X \;\; yPx\}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

ahol P egy reflexív bináris reláció $\Omega \times \Omega$-n.

3.2.2. Állítás.

Ha $\mathfrak{f}_P$ a reflexív P reláció pont→halmaz függvényreprezentációja, akkor $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$ és $\mathcal{H}_P$ ekvivalensek, azaz

$$\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) = \mathcal{H}_P(X) \;\; \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset.$$

Bizonyítás.

Bármely $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ esetén

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{H}_P(X) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists y \in X : \; yPx \Leftrightarrow \exists y \in X : \; x \in \mathfrak{f}_P(y) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{y \in X} \mathfrak{f}_P(y) = \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X). \end{aligned}$$

Ez igaz minden $x \in \Omega$ esetén, tehát $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) = \mathcal{H}_P(X) \;\; \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$. ♦

A fenti ekvivalenciát felhasználva egy sor állítás bizonyítása egyszerűsödik le, illetve a Kortelainen-féle halmaz-kiterjesztésre új állítások is bizonyíthatók.

3.2.2.1. Következmény.

$\mathcal{H}_P$ egy monoton halmaz-kiterjesztési operátor, azaz

1. $X \subseteq \mathcal{H}_P(X) \;\; \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$;
2. $X \subseteq Y$*-ből következik, hogy* $\mathcal{H}_P(X) \subseteq \mathcal{H}_P(Y)$*, ha* $X, Y \in 2^\Omega \setminus \emptyset$;

Sőt, ha P relációról a reflexivitás mellett a tranzitivitást is feltételezzük, akkor

3. $\mathcal{H}_P(\mathcal{H}_P(X)) = \mathcal{H}_P(X) \;\; \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$

is teljesül, vagyis $\mathcal{H}_P$ ebben az esetben egy lezárási operátor.

Bizonyítás.
Ez következik a 3.2.1. és 3.2.2. Állításokból. ♦

A $\mathcal{H}_P(X)$ halmazt az X halmaz P-szerinti monoton halmaz-kiterjesztésének, illetve lezárásának nevezzük.

3.2.3. Állítás.

Ha P egy tetszőleges reflexív reláció $\Omega \times \Omega$-n és $\mathfrak{f}_P$ a pont→halmaz függvényreprezentációja, akkor bármely $X, Y \in 2^\Omega$ esetén igazak az alábbi tartalmazások:

1. $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X \cap Y) \subseteq \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) \cap \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(Y)$;
   $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X \cup Y) \subseteq \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) \cup \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(Y)$;
2. $\mathcal{H}_P(X \cap Y) \subseteq \mathcal{H}_P(X) \cap \mathcal{H}_P(Y)$;
   $\mathcal{H}_P(X \cup Y) \subseteq \mathcal{H}_P(X) \cup \mathcal{H}_P(Y)$.

Bizonyítás.
A 3.2.2. Állítás értelmében a két kiterjesztési operátor közül elég az $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}$-re vonatkozó állításokat bizonyítanunk.

$$
\begin{aligned}
x^* \in \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X \cap Y) \;\; &\Rightarrow \;\; x^* \in \textstyle\bigcup_{y \in X \cap Y} \mathfrak{f}_P(y) \\
&\Rightarrow \;\; \exists y^* \in X \cap Y : x^* \in \mathfrak{f}_P(y^*) \\
&\Rightarrow \;\; \exists y^* \in X : x^* \in \mathfrak{f}_P(y^*) \text{ és } y^* \in Y : x^* \in \mathfrak{f}_P(y^*) \\
&\Rightarrow \;\; x^* \in \textstyle\bigcup_{y \in X} \mathfrak{f}_P(y) \text{ és } x^* \in \bigcup_{y \in Y} \mathfrak{f}_P(y) \\
&\Rightarrow \;\; x^* \in \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) \cap \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(Y)
\end{aligned}
$$

Innét következik, hogy $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X \cap Y) \subseteq \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) \cap \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(Y)$.

Másrészt,

$$\begin{aligned} x^* \in \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X \cup Y) &\Rightarrow x^* \in (\bigcup_{y \in X \cup Y} \mathfrak{f}_P(y)) \\ &\Rightarrow x^* \in (\bigcup_{y \in X} \mathfrak{f}_P(y)) \bigcup (\bigcup_{y \in Y} \mathfrak{f}_P(y)) \\ &\Rightarrow x^* \in \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) \bigcup \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(Y). \end{aligned}$$

Innét következik, hogy $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X \cup Y) \subseteq \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(X) \cup \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_P}(Y)$. ♦

3.2.4. ÁLLÍTÁS.

Ha P_1 és P_2 két tetszőleges reflexív reláció az $\Omega \times \Omega$-n, akkor bármely $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ esetén, ha $P_1 \subseteq P_2$, akkor

1. $\mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_{P_1}}(X) \subseteq \mathfrak{Im}_{\mathfrak{f}_{P_2}}(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset.$
2. $\mathcal{H}_{P_1}(X) \subseteq \mathcal{H}_{P_2}(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset.$

Bizonyítás.

Bizonyítsuk most a két ekvivalens állítás közül a másodikat.

Legyen $x^* \in \mathcal{H}_{P_1}(X)$. Akkor $\mathcal{H}_{P_1}(X)$ definíciója szerint létezik olyan $y^* \in X$ alternatíva, amelyre $y^* P_1 x^*$ teljesül. A feltétel szerint $P_1 \subseteq P_2$, amiből következik, hogy $y^* P_2 x^*$. Mivel $y^* \in X$, ezért $x^* \in \mathcal{H}_{P_2}(X)$. ♦

A 3.2.2.1. Következmény és a 3.2.3. Állítást a Korttelainen [27] dolgozat a $\mathcal{H}_P$ halmaz$\to$halmaz függvény (3.9) definíciójával bizonyítja.

3.2.2. A valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított R- és S^d-szerinti halmaz-kiterjesztési operátorok

Ebben az alfejezetben egy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított R és S^d relációkra vizsgáljuk a $\mathcal{H}_P$ monoton halmaz-kiterjesztési operátort. A következőkben ezeket a $\mathcal{H}_R(X)$ ill. $\mathcal{H}_{S^d}(X)$-vel jelölt halmaz-kiterjesztési operátorokat az $X \in \mathfrak{B}$ halmazoknak a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított R- ill. S^d-*szerinti halmaz-kiterjesztés*ének nevezzük.

Mint tudjuk, R pont→halmaz függvényreprezentációja a (2.5) formulával definiált $Z(x)$ pont→halmaz függvény és S^d pont→halmaz függvényreprezentációja a (2.6) előállításból a 2.2.5. Lemma szerint származtatott $V^d(x)$ pont→halmaz függvény. Így az előző fejezet alapján kapjuk a következő állításokat.

3.2.5. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy reflexív* (R, D)*-racionális valódi döntési mechanizmus. Akkor*

1. $\mathcal{H}_R(X) = \mathfrak{Im}_Z(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset;$

   $\mathcal{H}_{S^d}(X) = \mathfrak{Im}_{V^d}(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset.$

2. *Ha teljesül az* $R \subseteq S^d$ *WARP feltétel, akkor*

   $\mathcal{H}_R(X) \subseteq \mathcal{H}_{S^d}(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset;$

   $\mathfrak{Im}_Z(X) \subseteq \mathfrak{Im}_{V^d}(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset.$

3.2.6. Állítás.

$\mathfrak{Im}_Z$ *és* $\mathcal{H}_R$ *monoton halmaz-kiterjesztési operátorok, azaz*

1. $X \subseteq \mathcal{H}_R(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset;$

   $X \subseteq \mathfrak{Im}_Z(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset.$

2. $X \subseteq Y$*-ből következik, hogy* $\mathcal{H}_R(X) \subseteq \mathcal{H}_R(Y)$*, ha* $X, Y \in 2^\Omega \setminus \emptyset;$

   $X \subseteq Y$*-ből következik, hogy* $\mathfrak{Im}_Z(X) \subseteq \mathfrak{Im}_Z(Y)$*, ha* $X, Y \in 2^\Omega \setminus \emptyset.$

Sőt, ha az R relációról a reflexivitás mellett a tranzitivitást is feltételezzük, akkor

3. $\mathcal{H}_R(\mathcal{H}_R(X)) = \mathcal{H}_R(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset;$

   $\mathfrak{Im}_Z(\mathfrak{Im}_Z(X)) = \mathfrak{Im}_Z(X) \ \ \forall X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$

is teljesül, vagyis ebben az esetben $\mathcal{H}_R$ *is és* $\mathfrak{Im}_Z$ *is lezárási operátorok.*

Ahhoz, hogy valamely $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ esetén az $X' = \mathcal{H}_R(X)$ (vagy $X' = \mathfrak{Im}_Z(X)$) halmazzal R-tartó bővítést hajthassunk végre, tudnunk kell, vajon teljesül-e a $C_R^{\mathrm{D}}(X') \neq \emptyset$ feltétel? Először is állítsuk elő a $\mathcal{H}_R(X)$ ill. a $\mathfrak{Im}_Z(X)$ kinyilvánított kiválasztási függvényét.

3.2.1. Lemma.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus és az általa kinyilvánított Richter-reláció reflexív. Akkor bármely* $X \in \mathfrak{B}$ *esetén*

$$C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) = \{x \in \mathcal{H}_R(X) : \mathcal{H}_R(X) \subseteq Z(x)\},$$

$$C_R^{\mathrm{D}}(\mathfrak{Im}_Z(X)) = \{x \in \mathfrak{Im}_Z(X) : \mathfrak{Im}_Z(X) \subseteq Z(x)\}.$$

Bizonyítás.
Az $\mathfrak{Im}_Z(X)$-re vonatkozó állítást bizonyítjuk.

$$\begin{aligned}
x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(\mathfrak{Im}_Z(X)) \quad &\Leftrightarrow \quad x^* R y \quad \forall y \in \bigcup_{x \in X} Z(x) \\
&\Leftrightarrow \quad x^* R y \quad \forall y \in Z(x) \quad \forall x \in X \\
&\Leftrightarrow \quad y \in Z(x^*) \quad \forall y \in Z(x) \quad \forall x \in X \\
&\Leftrightarrow \quad Z(x) \subseteq Z(x^*) \quad \forall x \in X \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{Im}_Z(X) = \bigcup_{x \in X} Z(x) \subseteq Z(x^*) \qquad \blacklozenge
\end{aligned}$$

Az $\mathfrak{Im}_Z(X)$, ill. a $\mathcal{H}_R(X)$ kinyilvánított kiválasztására érvényes az alábbi állítás is, ami tulajdonképpen az örökletesség axiomájának teljesülését jelenti az X és $\mathfrak{Im}_Z(X)$, ill. az X és $\mathcal{H}_R(X)$ halmazpárokon.

3.2.2. Lemma.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus és az általa kinyilvánított Richter-reláció reflexív. Akkor*

$$X \cap C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(X) \quad \forall X \in \mathfrak{B},$$

$$X \cap C_R^{\mathrm{D}}(\mathfrak{Im}_Z(X)) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(X) \ \ \forall X \in \mathfrak{B}.$$

Ha az R reláció tranzitív is, akkor

$$C_R^{\mathrm{D}}(X) = C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) \cap X \ \ \forall X \in \mathfrak{B},$$

$$C_R^{\mathrm{D}}(X) = C_R^{\mathrm{D}}(\mathfrak{Im}_Z(X)) \cap X \ \ \forall X \in \mathfrak{B}.$$

Bizonyítás.

A $\mathcal{H}_R$-rel felírt állítást bizonyítjuk.

Legyen $x^* \in X \cap C(\mathcal{H}_R(X))$. Ez azt jelenti, hogy $x^* \in X$ és x^*Ry minden $y \in \mathcal{H}_R(X)$ esetén. Így $x^* \in X$ és x^*Ry minden $y \in X \subseteq \mathcal{H}_R(X)$ esetén. Ezért $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$, következésképpen $X \cap C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(X)$.

Legyen $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$ és y^* a $\mathcal{H}_R(X)$ halmaz egy tetszőlegesen választott pontja. A $\mathcal{H}_R(X)$ halmaz definíciója szerint létezik olyan $\overline{x} \in X$ alternatíva, amelyre $\overline{x}Ry^*$ teljesül. Másrészről, mivel $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$, ezért $x^*R\overline{x}$ teljesül. Az R tranzitivitását kihasználva, az utolsó két relációból következik az x^*Ry^* reláció. Mivel $y^* \in \mathcal{H}_R(X)$ tetszőlegesen választott alternatíva volt, ezért $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X))$, következésképpen $C_R^{\mathrm{D}}(X) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X))$. Innét

$$C_R^{\mathrm{D}}(X) = C_R^{\mathrm{D}}(X) \cap X \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) \cap X \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(X),$$

ami csak $C_R^{\mathrm{D}}(X) = C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) \cap X$ esetén teljesülhet. ♦

A fenti lemmában $C_R^{\mathrm{D}}(X)$ mindenütt $C(X)$-re cserélhető, ha $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ reflexív, ill. reflexív tranzitív (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus.

A tranzitivitás csak elégséges feltétel ahhoz, hogy $C_R^{\mathrm{D}}(X) = C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) \cap X$ legyen.

A 3.2.1. Példában egy olyan valódi döntési mechanizmust mutatunk, ahol bár a kinyilvánított R reláció nem tranzitív, teljesül a $C_R^{\mathrm{D}}(X) = C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) \cap X$ egyenlőség bizonyos $X \in \mathfrak{B}$ esetén, míg másoknál nem.

A 3.2.2. Lemma alapján azonban csak tranzitív R esetén tudjuk biztosan garantálni, hogy $C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) \neq \emptyset$ $(C_R^{\mathrm{D}}(\mathfrak{Im}_Z(X)) \neq \emptyset)$.

3.2.7. ÁLLÍTÁS.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy valódi döntési mechanizmus és az általa kinyilvánított Richter-reláció reflexív. Ha* $\mathcal{H}_R(X) \notin \mathfrak{B}$ *és* $C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X)) \neq \emptyset$ *valamely* $X \in \mathfrak{B}$ *esetén, akkor a*

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}^{+} = (\Omega, \mathfrak{B} \cup \{\mathcal{H}_R(X)\}, C_R^{\mathrm{D}}) \qquad (\mathfrak{D}_Z^{+} = (\Omega, \mathfrak{B} \cup \{\mathfrak{Im}_Z(X)\}, C_R^{\mathrm{D}}))$$

egy valódi döntési mechanizmus lesz.
Ha $\mathfrak{D}$ *reflexív* (R, D)*-racionális valódi döntési mechanizmus volt, akkor* $\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}^{+}$*, ill.* $\mathfrak{D}_Z^{+}$ *is az lesz.*

Bizonyítás.
Triviális.

3.2.3. A valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított C-szerinti halmaz-kiterjesztési operátor

G. A. Koshevoy [28] a P részben vagy teljes rendezéssel definiált $(P_{\mathrm{asym}}, \mathrm{ND})$-racionalitású tökéletes, de nem feltétlenül valódi $\mathfrak{D} = (\Omega, 2^{\Omega}, C)$ döntési mechanizmusok vizsgálata során vezette be a következő operátort

$$\begin{aligned} \tilde{C} \quad &: \quad 2^{\Omega} \to 2^{\Omega} \\ \tilde{C}(X) \quad &= \quad \bigcup \left\{ Y \in 2^{\Omega} \setminus \emptyset : C(Y) = C(X) \right\}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

amit a $C : 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ kiválasztási függvény nyilvánít ki. Megmutatta, hogy $\tilde{C}$ egy lezárási operátor 2^{Ω}-án, azaz kielégíti a lezárási operátor 1.2.2. Definíciójában megkövetelt feltételeket $\mathfrak{B} = 2^{\Omega}$ halmazaira alkalmazva.

A következőkben általánosabb feltételek mellett vizsgáljuk a Koshevoy-operátort. Egyrészt megszorítjuk a $\mathfrak{B} \subseteq 2^{\Omega} \setminus \emptyset$ halmazrendszerre és kevesebb feltételt teszünk a kinyilvánító $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ (P, D)-racionalitására is, többnyire elegendő lesz a kinyilvánított R Richter-reláció reflexivitása és az (R, D)-racionalitás feltételezés. Így azonban nem feltétlenül tudjuk tudjuk garantálni, hogy az általunk használt operátor lezárási operátor legyen.

3.2.1. Definíció.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy valódi döntési mechanizmus. A*

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_C : \mathfrak{B} \to 2^\Omega \setminus \emptyset, \\ &X \xrightarrow{\mathcal{K}_C} \bigcup \{Y \in \mathfrak{B} : C(Y) = C(X)\}, \quad \forall X \in \mathfrak{B} \end{aligned} \tag{3.11}$$

leképezést a $\mathfrak{D}$ *valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított* C-szerinti halmaz-kiterjesztési operátor*nak fogjuk nevezni.*

A $\mathcal{K}_C$ *operátor* injekív, *ha* $\mathcal{K}_C : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$.

A kiterjesztési operátor elnevezés jogosságát az alábbi állítás igazolja:

3.2.8. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy valódi döntési mechanizmus és* $\mathcal{K}_C$ *legyen az általa kinyilvánított* C*-szerinti halmaz-kiterjesztési operátor. Akkor az extenzivitási feltétel teljesül, azaz*

$$X \subseteq \mathcal{K}_C(X) \qquad \forall X \in \mathfrak{B}.$$

Bizonyítás.

Ez abból a tényből következik, hogy X szerepel a $\mathcal{K}_C(X)$ halmazt alkotó halmazok között. ♦

Amennyiben a $\mathcal{K}_C$ operátort definiáló $\mathfrak{D}$ valódi döntési mechanizmus (P, D)-racionális, akkor P relációról az antiszimmetriát (pl. rendezés esetén) megkövetelni a kiválasztási függvényre épülő döntési módszerben nagyon szigorú feltétel, mert azt jelenti, hogy a $C(X)$ kiválasztási függvény csupán egy elemet tartalmazhat minden $X \in \mathfrak{B}$ esetén. Ebből viszont következik az alábbi állítás:

3.2.9. Állítás.

Ha $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy részben vagy teljesen rendező* (P, D)*-racionalitású valódi döntési mechanizmus, akkor* $\exists x^* \in X$, *melyre* $\mathcal{K}_C(X) = Z(x^*)$.

Bizonyítás.

Legyen $X \in \mathfrak{B}$. Mivel $\mathfrak{D}$ valódi döntési mechanizmus, és P rendezés, így $C(X) = \{x^*\}$. Így

$$\mathcal{K}_C(X) = \bigcup\{Y \in \mathfrak{B} : \{x^*\} = C(Y)\} = Z(x^*). \qquad \blacklozenge$$

Ahhoz, hogy $\mathcal{K}_C(X) \notin \mathfrak{B}$ halmazzal R-tartó bővítést hajthassunk végre a döntési mechanizmuson, szükségünk van a $C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$ kiválasztásra.

3.2.10. ÁLLÍTÁS.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus és $\mathcal{K}_C$ legyen az általa kinyilvánított C-szerinti halmaz-kiterjesztési operátor. Akkor

$$C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X)) = C_R^{\mathrm{D}}(X) = C(X) \neq \emptyset.$$

Ha $\mathcal{K}_C$ halmaz-kiterjesztési operátor injektív $\mathfrak{B}$-n, akkor

$$C(\mathcal{K}_C(X)) = C(X) \quad \forall X \in \mathfrak{B}.$$

Bizonyítás.

Legyen $X \in \mathfrak{B}$ és $x \in C(X)$. Jelölje $\mathcal{Y}_X$ azt a halmazrendszert, amely tartalmazza azokat a halmazokat, amelyek kielégítik a $\mathcal{K}_C(X)$ definíciójában szereplő feltételt, azaz

$$\mathcal{Y}_X = \{Y \in \mathfrak{B} : C(Y) = C(X)\}. \tag{3.12}$$

Ezzel a jelöléssel $x \in C(Y)$ minden $Y \in \mathcal{Y}_X$ esetén. Azt a tényt kihasználva, hogy az opcionális halmazrendszerbe tartozó halmazokra $C(X)$ és $C_R^{\mathrm{D}}(X)$ megegyezik, azt kapjuk, hogy xRy minden $y \in Y$. Következésképpen,

$$xRy \quad \forall y \in \cup\{Y : Y \in \mathcal{Y}_X\} = \mathcal{K}_C(X).$$

Ez azt jelenti, hogy $x \in C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$, vagyis $C(X) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$.

Most bizonyítsuk az ellenkező irányú tartalmazást. Legyen $x \in C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$ egy tetszőleges alternatíva. Mivel $x \in \mathcal{K}_C(X)$, ezért a $\mathcal{K}_C(X)$ halmaz konstrukciója miatt létezik olyan $Y \in \mathcal{Y}_X$, amelyre teljesül, hogy $x \in Y$, ahol az $\mathcal{Y}_X$ halmazrendszert (3.12) definiálja. Mivel $x \in C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$, így xRy minden $y \in \mathcal{K}_C(X)$. Következésképpen, ha $Y \in \mathcal{Y}_X$ akkor xRy minden $y \in Y$ alternatívára, azaz $x \in C_R^{\mathrm{D}}(Y) = C(Y) = C(X) = C_R^{\mathrm{D}}(X)$. Ez bizonyítja, hogy $C(X) \supseteq C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$ tartalmazást.

Ha $\mathcal{K}_C$ injektív, akkor $\mathcal{K}_C(X) \in \mathfrak{B}$, tehát

$$C(\mathcal{K}_C(X)) = C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X)) = C_R^{\mathrm{D}}(C) = C(X).$$ ♦

Ha $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, akkor a

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{K}_C} = \mathfrak{B} \cup \{\mathcal{K}_C(X) : \mathcal{K}_C(X) \notin \mathfrak{B},\ X \in \mathfrak{B}\} \tag{3.13}$$

halmazrendszert a $\mathfrak{B}$ opcionális halmazrendszerhez tartozó $\mathcal{K}_C$-szerinti kiterjesztésnek, a $\mathfrak{D}^+_{\mathcal{K}_C} = (\Omega, \mathfrak{B}_{\mathcal{K}_C}, C_R^{\mathrm{D}})$ döntési mechanizmust pedig a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus R-tartó $\mathcal{K}_C$-bővítésének nevezzük.

Kérdés, hogy valamennyi $\mathfrak{B}$-n kívüli halmaz C-szerinti halmaz- kiterjesztésével bővített $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}_C}$ opcionális halmazrendszer vajon már $\mathcal{K}_C$-re zárt lesz-e. Ehhez azt kell megvizsgálnunk, hogy a $\mathcal{K}_C$ operátor idempotens-e.

3.2.11. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus. Akkor

$$\mathcal{K}_C(X) = \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X) = \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(\mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X)) = \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(\mathcal{K}_C(X)) \quad \forall X \in \mathfrak{B}.$$

Ha a $\mathcal{K}_C$ halmaz-kiterjesztési operátor injekív, akkor

$$\mathcal{K}_C(\mathcal{K}_C(X)) = \mathcal{K}_C(X).$$

Bizonyítás.

Az (R, D)-racionalitás miatt

$$C(X) = C_R^{\mathrm{D}}(X)\ \ \forall X \in \mathfrak{B}.$$

Ha figyelembe vesszük az 3.2.10. Állítást, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(\mathcal{K}_C(X)) =$$

$$= \bigcup \{Y \in \mathfrak{B} : C(Y) = C_R^{\mathrm{D}}(Y) = C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X)) = C(X)\} =$$

$$= \mathcal{K}_C(X).$$

Az állítás második része az 3.2.10. Állításból következik. ♦

3.2.11.1. Következmény.

Ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus (R, D)-racionális, akkor a (3.13) szerint definiált $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}_C}$ halmazrendszer a legszűkebb olyan opcionális halmazrendszer, amelyhez tartozó $\mathfrak{D}^+_{\mathcal{K}_C} = (\Omega, \mathfrak{B}_{\mathcal{K}_C}, C_R^{\mathrm{D}})$ (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított $\mathcal{K}_C$ halmaz-kiterjesztési operátor injektív.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ nem (R, D)-racionális. A kérdés az, vajon ebben az esetben is lehet-e egy $\mathcal{K}_C(X)$ halmazzal R-tartó bővítést végrehajtani. Ehhez arra kell feltételt adnunk, mikor nem lesz a $C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$ kinyilvánított kiválasztás üres halmaz.

3.2.12. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy nem (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, Tegyük fel, hogy egy $X \in \mathfrak{B}$ halmaz a következő két feltétel egyikét kielégíti :

1. *$\mathcal{K}_C(X) = X$;*
2. *$\mathcal{K}_C(X) \supset X$ és*
   - 2a. *Minden $y \in \mathcal{K}_C(X) \setminus X$ alternatívához létezik olyan $x \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$, amelyre $y\overline{R}x$ teljesül.*
   - 2b. *Továbbá, ha még $C_R^{\mathrm{D}}(X) \setminus C(X) \neq \emptyset$ is teljesül, akkor $x \in C_R^{\mathrm{D}}(X) \setminus C(X)$ és $y \in \mathcal{K}_C(X) \setminus X$ implikálja, hogy xRy.*

Akkor

$$C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X)) = C_R^{\mathrm{D}}(X) \neq \emptyset.$$

Bizonyítás.

Ha $\mathcal{K}_C(X) = X$, akkor az állítás triviális.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}_C(X) \setminus X \neq \emptyset$. Legyen $y^* \in C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$. Akkor $y^* \in \mathcal{K}_C(X)$ és $y^* Rx$ minden $x \in \mathcal{K}_C(X)$ esetén. Mivel $X \subseteq \mathcal{K}_C(X)$, ezért nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$y^* Rx \ \ \forall x \in X. \tag{3.14}$$

Tegyük fel, hogy $y^* \in \mathcal{K}_C(X) \setminus X$. Akkor a *2a.* feltétel szerint létezik olyan

$$x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X) \subseteq X \subseteq \mathcal{K}_C(X)$$

alternatíva, amelyre $y^* \overline{R} x^*$ teljesül. Ez viszont elletmond a $y^* \in C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$ feltételnek. Tehát $y^* \in X$. Ebben az esetben pedig (3.14) szerint $y^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$ teljesül. Tehát a $C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X)) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(X)$ tartalmazás fennáll.

Most bizonyítsuk az ellenkező irányú tartalmazást. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$ alternatíva, amelyre $x^* \notin C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$ teljesül. A második feltétel azt jelenti, hogy

$$\exists y^* \in \mathcal{K}_C(X) : \quad x^* \overline{R} y^*. \tag{3.15}$$

$y^* \notin X$, mert ellenkező esetben ellentmondást kapnánk az $y^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$ feltétellel. Tehát $y^* \in \mathcal{K}_C(X) \setminus X$. Mivel a valódi döntési mechanizmus nem racionális, ezért két esetet különböztetünk meg.

1. Ha $x^* \in C(X)$, akkor a $\mathcal{K}_C(X)$ definíciója szerint létezik olyan $Y \in \mathfrak{B}$ halmaz, amelyre $x^* \in C(X) = C(Y) \subseteq C_R^{\mathrm{D}}(Y)$ és $y^* \in Y$, ami viszont ellentmond a (3.15) feltételnek.

2. Ha $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X) \setminus C(X)$, akkor a *2b.* feltétel szerint $x^* R y^*$ teljesül, ami szintén elletmondás a (3.15) feltétellel.

Az utolsó két ellentmondás indukálja, hogy $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X))$. Következésképpen $C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X)) = C_R^{\mathrm{D}}(X)$. ♦

A következő állításban egy nem (R, D)-racionális $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított $\mathcal{K}_C$ és $\mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}$ operátorok közötti kapcsolatot vizsgáljuk.

A 3.2.2. Példából látható, hogy a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ és $\mathfrak{D}' = (\Omega, \mathfrak{B}, C_R^{\mathrm{D}})$ által kinyilvánított halmaz-kiterjesztési-operátorok között mindkét irányú tartalmazás és az egyenlőség is feltűnik különböző $X \in \mathfrak{B}$ halmazokra. A következő állítás erre a jelenségre ad magyarázatot.

3.2.13. ÁLLÍTÁS.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, amely nem feltétlenül (R, D)-racionális és legyen R a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ által kinyilvánított Richter-reláció. Valamely $X \in \mathfrak{B}$ esetén:

1. *ha $C_R^{\mathrm{D}}(X) = C(X)$, akkor*

$$\mathcal{K}_{C_R^D}(X) \subseteq \mathcal{K}_C(X),$$

sőt, ha $\mathcal{K}_C(X) = X$ szintén teljesül, akkor

$$\mathcal{K}_{C_R^D}(X) = \mathcal{K}_C(X);$$

2. *ha $C_R^{\mathrm{D}}(X) \supset C(X)$ és $\mathcal{K}_C(X) = X$, akkor*

$$\mathcal{K}_{C_R^D}(X) \supseteq \mathcal{K}_C(X);$$

3. *ha $C_R^{\mathrm{D}}(X) \supset C(X)$ és $\mathcal{K}_C(X) \supset X$, és még a következő három feltétel is teljesül:*

   3a. $\mathcal{K}_C$ injektív a $\mathfrak{B}$ opcionális halmazrendszeren;

   3b. minden $y \in \mathcal{K}_C(X) \setminus X$ esetén létezik olyan $x \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$, amelyre $y\overline{R}x$;

   3c. $x \in C_R^{\mathrm{D}}(X) \setminus C(X)$ és $y \in \mathcal{K}_C(X) \setminus X$ implikálja a xRy relációt,

   akkor

$$\mathcal{K}_{C_R^D}(X) \supseteq \mathcal{K}_C(X).$$

Bizonyítás.

1. Legyen $C_R^{\mathrm{D}}(X) = C(X)$. Akkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_C(X) &= \bigcup \{Y \in \mathfrak{B} : C(Y) = C(X)\} = \\
&= \left(\bigcup \left\{Y \in \mathfrak{B} : C(Y) = C_R^{\mathrm{D}}(Y) = C_R^{\mathrm{D}}(X)\right\}\right) \\
&\qquad \bigcup \left(\bigcup \left\{Y \in \mathfrak{B} : C(Y) = C_R^{\mathrm{D}}(X) \subset C_R^{\mathrm{D}}(Y)\right\}\right) \supseteq \\
&\supseteq \left(\bigcup \left\{Y \in \mathfrak{B} : C(Y) = C_R^{\mathrm{D}}(Y) = C_R^{\mathrm{D}}(X)\right\}\right) = \\
&= \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X).
\end{aligned}$$

Másrészről, ha $\mathcal{K}_C(X) = X$, akkor az $X \subseteq \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X)$ tartalmazásból következik, hogy

$$\mathcal{K}_C(X) \subseteq \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X),$$

következésképpen ebben az esetben

$$\mathcal{K}_C(X) = \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X).$$

2. Ez az első állítás bizonyításának második feléből következik, mivel ott a $C(X) = C_R^{\mathrm{D}}(X)$ egyenlőséget nem használtuk.

3. A $\mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}$ definíciója szerint

$$\mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X) = \bigcup \left\{Y \in \mathfrak{B} : C_R^{\mathrm{D}}(Y) = C_R^{\mathrm{D}}(X)\right\}.$$

A 3.2.12. Állítás miatt az adott feltételek garantálják, hogy $C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{K}_C(X)) = C_R^{\mathrm{D}}(X)$. Mivel $\mathcal{K}_C$ injektív, ezért $\mathcal{K}_C(X) \in \mathfrak{B}$, így szerepel $\mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X)$ előállításában szereplő halmazok között, ezért $\mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X) \supseteq \mathcal{K}_C(X)$. ♦

3.2.4. A C- és az R-szerinti halmaz-kiterjesztési operátorok kapcsolata

Ebben az alfejezetben a tartalmazásra nézve összehasonlítjuk a valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított C- és R-szerinti halmaz-kiterjesztési operátorokat.

3.2.14. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy reflexív (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus. Akkor minden $X \in \mathfrak{B}$ halmazra

1. $\mathcal{K}_C(X) \subseteq \mathcal{H}_R(C(X)) \subseteq \mathcal{H}_R(X)$.

2. $\mathcal{K}_C(X) \subset \mathcal{H}_R(X)$ *akkor és csak akkor teljesül, ha létezik olyan* $Y \in \mathfrak{B}$*, amelyre*

$$Y \setminus \mathcal{K}_C(X) \neq \emptyset \ \ \textit{és} \ \ X \cap C(Y) \neq \emptyset. \tag{3.16}$$

Bizonyítás.

1. Legyen $x^* \in \mathcal{K}_C(X)$. A $\mathcal{K}_C(X)$ definíciója szerint létezik olyan $Y \in \mathfrak{B}$, amelyre $C(Y) = C(X) \neq \emptyset$ és $x^* \in Y$. Így létezik olyan $y^* \in C(Y) = C(X) \subseteq X$, amelyre $y^* R x^*$. A $\mathcal{H}_R(C(X))$ definíciója alapján $x^* \in \mathcal{H}_R(C(X))$.

A második tartalmazás $\mathcal{H}_R$ monotonitásából adódik.

2. Elégségesség. Tegyük fel, hogy létezik olyan $Y \in \mathfrak{B}$ halmaz, amely kielégíti a (3.16) feltételt, azaz létezik $x^* \in Y \setminus \mathcal{K}_C(X)$ és $y^* \in X \cap C(Y)$. Nyilvánvaló, hogy $x^* \neq y^*$, mert $y^* \in X \subseteq \mathcal{K}_C(X)$, de

$$x^* \notin \mathcal{K}_C(X). \tag{3.17}$$

Mivel $y^* \in X \cap C(Y)$, ezért $y^* \in X$ és $y^* R x$ minden $x \in Y$. Másrészről viszont $x^* \in Y \setminus \mathcal{K}_C(X)$, amiből $x^* \in Y$ következik. Tehát $y^* R x^*$. Ez azt jelenti, hogy

$$x^* \in \mathcal{H}_R(X). \tag{3.18}$$

A (3.17) és (3.18) formulákból következik, hogy $\mathcal{K}_C(X) \subset \mathcal{H}_R(X)$.

Szükségesség. Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}_C(X) \subset \mathcal{H}_R(X)$. Ekkor létezik olyan $x^* \in \Omega$, amelyre $x^* \notin \mathcal{K}_C(X)$ és $x^* \in \mathcal{H}_R(X)$. A $\mathcal{H}_R(X)$ definíciójából következik, hogy létezik olyan $y^* \in X$, amelyre $y^* R x^*$, ezért a Richter-reláció definíciója alapján van olyan $Y \in \mathfrak{B}$, amelyre $y^* \in C(Y) \cap X$ és $x^* \in Y \setminus \mathcal{K}_C(X)$. Tehát (3.16) teljesül. ♦

A 3.2.3. Példa rámutat a (3.16) feltétel szükségességére.

Vizsgáljuk most a halmazok P-szerinti halmaz-kiterjesztése és azok C-szerinti halmaz-kiterjesztése közötti tartalmazásokat.

3.2.15. Állítás.

Legyen a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy reflexív* (P, D)*-racionális valódi döntési mechanizmus. Akkor*

1. $\mathcal{H}_P(X) \subseteq \mathcal{H}_P(\mathcal{K}_C(X))$.

2. $\mathcal{H}_P(X) \subset \mathcal{H}_P(\mathcal{K}_C(X))$, *ha létezik olyan* $x^* \in \mathcal{K}_C(X) \setminus X$ *és* $y^* \in \Omega$, *melyekre* $x^* P y^*$ *és* $x \overline{P} y^*$ *minden* $x \in X$.

Bizonyítás.

1. $\mathcal{K}_C$ extenzívitásából és $\mathcal{H}_P$ monotonitásából következik.

2. Mivel $x \overline{P} y^*$ minden $x \in X$ esetén, ezért nem létezik olyan $x \in X$ amelyre $x P y^*$. Következésképpen

$$y^* \notin \mathcal{H}_P(X). \tag{3.19}$$

Másrészről, létezik olyan $x^* \in \mathcal{K}_C(X) \setminus X$ és $y^* \in \Omega$, amelyre $x^* P y^*$. Ebből következik, hogy

$$y^* \in \mathcal{H}_P(\mathcal{K}_C(X)). \tag{3.20}$$

(3.19) és (3.20) együtt a kívánt $\mathcal{H}_P(X) \subset \mathcal{H}_P(\mathcal{K}_C(X))$ szigorú tartalmazást adja. ♦

A következő állításban szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy $P = R$ esetén a 3.2.15. Állításban mikor lesz szigorú tartalmazás.

3.2.16. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy reflexív* (R, D)*-racionális valódi döntési mechanizmus. Valamely* $X \in \mathfrak{B}$ *halmazra*

$$\mathcal{H}_R(X) \subset \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)) \tag{3.21}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha létezik olyan $Y \in \mathfrak{B}$, *amelyre*

$$(\mathcal{K}_C(X) \setminus X) \cap C(Y) \neq \emptyset \tag{3.22}$$

és

$$Y \setminus \bigcup \{A \in \mathfrak{B} : C(A) \cap X \neq \emptyset\} \neq \emptyset. \tag{3.23}$$

Bizonyítás.

Az (R, D)-racionalitás miatt minden $X \in \mathfrak{B}$ esetén $C_R^{\mathrm{D}}(X) = C(X)$.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy (3.22) és (3.23) teljesül. Ez azt jelenti, hogy létezik

$$y^* \in (\mathcal{K}_C(X) \setminus X) \cap C(Y)$$

és

$$x^* \in Y \setminus \bigcup \{A \in \mathfrak{B} : C(A) \cap X \neq \emptyset\} .$$

Mivel $y^* \in \mathcal{K}_C(X) \cap C(Y)$ és $x^* \in Y$, ezért azt kapjuk, hogy

$$y^* \in \mathcal{K}_C(X) \cap C(Y) \subset \mathcal{K}_C(X) \quad \text{és} \quad y^* R x^*.$$

$\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$ definíciója alapján

$$x^* \in \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)). \tag{3.24}$$

Másrészről

$$x^* \notin \bigcup \{A \in \mathcal{B} : C(A) \cap X \neq \emptyset\} .$$

Ha $A \in \mathfrak{B}$ úgy, hogy $C(A) \cap X \neq \emptyset$, akkor $x^* \notin A$. Ebből kapjuk, hogy egyetlen $y \in X$ esetén sem létezik $A \in \mathfrak{B}$, amelyre $y \in C(A)$ és $x^* \in A$. Tehát minden $y \in X$ alternatívára az $y\overline{R}x^*$ reláció teljesül. Így

$$x^* \notin \mathcal{H}_R(X). \tag{3.25}$$

A (3.24) és (3.25) teljesüléséből következik (3.21).

Szükségesség. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}_R(X) \subset \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$. Akkor létezik $x^* \in \Omega$, amelyre $x^* \notin \mathcal{H}_R(X)$ és $x^* \in \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$.

$x^* \notin \mathcal{H}_R(X)$ azt jelenti, hogy minden $y \in X$ esetén $y\overline{R}x^*$.

Vezessük be a következő halmazrendszert

$$\mathcal{A}(x^*, y) = \{Y \in \mathfrak{B} : x^* \in Y, y \in C(Y)\} .$$

A Richter-reláció definíciója szerint, ha $y\overline{R}x^*$, akkor

$$\mathcal{A}(x^*, y) = \emptyset \;\; \forall y \in X. \tag{3.26}$$

Másrészről $x^* \in \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$ azt jelenti, hogy létezik olyan $y^* \in \mathcal{K}_C(X)$, amelyre $y^* R x^*$. Ebből következik, hogy

$$\mathcal{A}(x^*, y^*) \neq \emptyset. \tag{3.27}$$

A (3.26) és (3.27) alapján $y^* \notin X$, azaz $y^* \in \mathcal{K}_C(X) \setminus X$, de $y^* \in C(Y)$ $Y \in \mathcal{A}(x^*, y^*)$ esetén, következésképpen (3.24) teljesül.

Továbbá (3.26) azt jelenti, hogy ha $y \in C(A)$ valamely $A \in \mathfrak{B}$ esetén, akkor $x^* \notin A$, azaz

$$x^* \notin \bigcup \{A \in \mathfrak{B} : C(A) \cap X \neq \emptyset\}.$$

(3.27) szerint létezik olyan $Y \in \mathcal{A}(x^*, y^*)$, amelyre $x^* \in Y$, tehát

$$x^* \in Y \setminus \bigcup \{A \in \mathcal{B} : C(A) \cap X \neq \emptyset\}. \qquad \blacklozenge$$

(3.22) és (3.23) szükségességét és elégségességét mutatja be a 3.2.4. Példa.

Végül, arra a kérdésre kívánunk választ adni, hogy az opcionális halmazrendszer milyen struktúrája mellett lesz a $\mathcal{H}_R(X)$ és $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$ között azonosság.

3.2.17. ÁLLÍTÁS.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy olyan reflexív (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, ahol a $\mathfrak{B}$ opcionális halmazrendszer tartalmazza 2^Ω minden kételemű részhalmazát. Valamely $X \in \mathfrak{B}$ esetén

$$\mathcal{H}_R(X) = \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)) \tag{3.28}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha minden $x \in \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)) \setminus X$ alternatívához létezik olyan $y \in X$, amelyre $y \in C(\{x, y\})$.

Bizonyítás.

Elégségesség. A 3.2.8. Állítás alapján $X \subseteq \mathcal{K}_C(X)$. Mivel $\mathcal{H}_R$ operátor monoton és $\mathcal{K}_C$ extenzív, így

$$\mathcal{H}_R(X) \subseteq \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)).$$

Legyen $x \in \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$. Ha $x \in X$, akkor az $X \subseteq \mathcal{H}_R(X)$ tartalmazásból következik, hogy $x \in \mathcal{H}_R(X)$.

Legyen most $x \in \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)) \setminus X$. Az állítás feltétele szerint létezik olyan $y \in X$, amelyre $\{x, y\} \in \mathfrak{B}$ és $y \in C(\{x, y\})$. Másrészt, a döntési mechanizmus (R, D)-racionalitása miatt $C(X) = C_R^{\mathrm{D}}(X)$ minden $X \in \mathfrak{B}$ esetén, így yRx, azaz $x \in \mathcal{H}_R(X)$. Következésképpen,

$$\mathcal{H}_R(X) \supseteq \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)).$$

Szükségesség. Tegyük fel, hogy (3.28) teljesül valamely $X \in \mathfrak{B}$ esetén. Válasszunk egy $x \in \mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)) \setminus X$ alternatívát. Mivel $x \in \mathcal{H}_R(X)$ szintén teljesül, ezért létezik olyan $y \in X$, amelyre yRx, azaz ehhez az y alternatívához létezik olyan $Y \in \mathfrak{B}$, amelyre $y \in C(Y)$ és $x \in Y$. Ez azt jelenti, hogy $y \in C(Y) \cap X$, következésképpen, yRy és yRx. Tehát $y \in C(\{x, y\})$. ♦

A 3.2.17. Állítás feltételeit illusztrálja a 3.2.5. Példa.

3.2.5. Példák

3.2.1. PÉLDA.

Definiálja a 4. Táblázat első két oszlopa a döntési mechanizmust, a többi oszlopa pedig a feliratnak megfelelő halmazokat. A 5. Táblázat adja a döntési mechanizmus által kinyilvánított Richter-relációt.

4. Táblázat.

$X \in \mathfrak{B}$	$C(X)$		$X \cap C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X))$	$C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X))$	$\mathcal{H}_R(X)$
$a\ b\ c$	a	$\supset$		d	$a\ b\ c\ d$
$a\ d$	d	$=$	d	d	$a\ b\ c\ d$
$b\ c\ d$	$b\ d$	$\supset$	d	d	$a\ b\ c\ d$
c	c	$=$	c	c	c
$b\ c$	b	$=$	b	$b\ d$	$b\ c\ d$

A 3.2.1. Példa illusztációja

5. Táblázat.

R	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	1	1	1	1

A 3.2.1. Példához tartozó
Richter-reláció

Ez egy nem tranzitív (R, D)-racionális döntési mechanizmus (bRd, dRa, de $b\overline{R}a$). A táblából kitűnik, hogy $C(X)$ és $C_R^{\mathrm{D}}(\mathcal{H}_R(X))$ között mind az egyenlőség, mind a tartalmazás előfordul különböző $X \in \mathfrak{B}$ esetén.

3.2.2. Példa.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, ahol $\Omega = \{a, b, c, d\}$. A 6. Táblázat definiálja a döntési struktúrát (1. és 2. oszlop), kinyilvánított Richter-reláció szerinti kiválasztásokat (6.oszlop), valamint a C- és C_R^{D}-szerinti halmaz-kiterjesztéseket mutatja (3. és 5. oszlop). A 4. oszlop a C- and C_R^{D}-halmaz-kiterjesztések közti tartalmazási irányt mutatja. A kinyilvánított Richter-relációt az 7. Táblázat adja.

Most elemezzük az 3.2.2. Példát az 3.2.13. Állítás tükrében.
Először is látható, hogy $\mathcal{K}_C$ injektív a $\mathfrak{B}$ opcionális halmazrendszeren.

1. Ha $X = \{a, c, d\}$, akkor

$$C(X) = C_R^{\mathrm{D}}(X) = \{a, d\} \quad \text{és} \quad \mathcal{K}_C(X) = X = \{a, c, d\},$$

ezért

$$\mathcal{K}_C(X) = \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X);$$

6. Táblázat.

X	$C(X)$	$\mathcal{K}_C(X)$		$\mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X)$	$C_R^{\mathrm{D}}(X)$
c	c	c	$=$	c	c
$a\ b$	a	$a\ b\ c$	$\subset$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b$
$a\ c$	a	$a\ b\ c$	$\supset$	$a\ c$	a
$a\ d$	d	$a\ c\ d$	$=$	$a\ c\ d$	$a\ d$
$b\ c$	b	$a\ b\ c\ d$	$\supset$	$b\ c\ d$	b
$b\ d$	b	$a\ b\ c\ d$	$\supset$	$b\ c\ d$	b
$c\ d$	d	$a\ c\ d$	$\supset$	$c\ d$	d
$a\ b\ c$	a	$a\ b\ c$	$\subset$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b$
$a\ b\ d$	b	$a\ b\ c\ d$	$=$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b$
$a\ c\ d$	$a\ d$	$a\ c\ d$	$=$	$a\ c\ d$	$a\ d$
$b\ c\ d$	b	$a\ b\ c\ d$	$\supset$	$b\ c\ d$	b
$a\ b\ c\ d$	$a\ b$	$a\ b\ c\ d$	$=$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b$

C- és C_R^{D}- szerinti halmaz-kiterjesztések
a 3.2.2. Példához

7. Táblázat.

R	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
c	0	0	1	0
d	1	0	1	1

A 3.2.2. Példához tartozó
Richter-reláció

Ha $X = \{a, c\}$, akkor $C(X) = C_R^{\mathrm{D}}(X) = \{a\}$ és

$$\mathcal{K}_C(X) = \{a, b, c\} \supset X = \{a, c\},$$

ezért

$$\mathcal{K}_C(X) \supseteq \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X);$$

2. Ha $X = \{a, b, c\}$, akkor $C(X) = \{a\} \subset C_R^{\mathrm{D}}(X) = \{a, b\}$ és

$$\mathcal{K}_C(X) = X = \{a, b, c\},$$

ezért

$$\mathcal{K}_C(X) \subset \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X);$$

3. Ha $X = \{a, b\}$, akkor $C(X) = \{a\} \subset C_R^{\mathrm{D}}(X) = \{a, b\}$ és

$$\mathcal{K}_C(X) = \{a, b, c\} \supset X = \{a, b\}.$$

Teljesül a tétel 3c. feltétele, azaz

$$\{b\} = C_R^{\mathrm{D}}(X) \setminus C(X), \quad \{c\} = \mathcal{K}_C(X) \setminus X \quad \text{és} \quad bRc.$$

Továbbá, $\{c\} = \mathcal{K}_C(X) \setminus X$ és $b \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$, de $c\overline{R}b$, azaz 3b. feltétel szintén teljesül. Ezért $\mathcal{K}_C(X) \subseteq \mathcal{K}_{C_R^{\mathrm{D}}}(X)$.

3.2.3. PÉLDA.

Definiáljuk a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ döntési mechanizmust a 8. Táblázat első két oszlopával. Az általa kinyilvánított Richter-relációt a 9. Táblázat mutatja. A 8. Táblázat utolsó két oszlopa a C- és R-szerinti halmaz-kiterjesztéseket írja le.

A 7. és 8. Táblázatokból kiolvasható, hogy a döntési mechanizmus reflexív (R, D)-racionális.

Nézzük meg most két különböző halmazra a C- és R-szerinti halmazkiterjesztések viszonyát:

1. Legyen $X = \{a, b, c\}$. Akkor (3.16) teljesül az $Y = \{c, d\}$ választással, mert

$$C(Y) = \{c, d\},\ Y \setminus \mathcal{K}_C(X) = \{d\} \quad \text{és} \quad X \cap C(Y) = \{c\}.$$

Tehát a tartalmazás $\mathcal{K}_C(X)$ és $\mathcal{H}_R(X)$ között szigorú.

8. Táblázat.

X	$C(X)$	$\mathcal{K}_C(X)$	$\mathcal{H}_R(X)$
c	c	c	$c\ d$
d	d	d	$c\ d$
$a\ b$	a	$a\ b\ c$	$a\ b\ c$
$a\ c$	a	$a\ b\ c$	$a\ b\ c\ d$
$b\ c$	b	$b\ c$	$b\ c\ d$
$c\ d$	$c\ d$	$c\ d$	$c\ d$
$a\ b\ c$	a	$a\ b\ c$	$a\ b\ c\ d$

A 3.2.17. Állítás illusztrációja

9. Táblázat.

R	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	1
d	0	0	1	1

A 3.2.3. és a 3.2.4. Példákhoz tartozó
Richter-reláció

2. Legyen $X = \{a, b\}$. Akkor $\{a, b\} \cap C(Y) \neq \emptyset$ teljesül, ha Y az $\{a, b\}$, $\{a, c\}, \{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ halmazok valamelyike. De ezen halmazok mindegyikére

$$Y \setminus \mathcal{K}_C(\{a, b\}) = Y \setminus \{a, b, c\} = \emptyset,$$

tehát a tartalmazás $\mathcal{K}_C(X)$ és $\mathcal{H}_R(X)$ között nem szigorú.

3.2.4. Példa.

Definiáljuk a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ döntési mechanizmust a 10. Táblázat első két oszlopával. Az általa kinyilvánított Richter-relációt itt is a 9. Táblázat mutatja. A 10. Táblázat következő oszlopai a C- és R-szerinti halmaz-kiterjesztéseket és a $\mathcal{K}_C(X)$ halmazok R-szerinti kiterjesztését adják.

10. Táblázat.

X	$C(X)$	$\mathcal{K}_C(X)$	$\mathcal{H}_R(X)$	$\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$
c	c	c	$c\ d$	$c\ d$
$a\ b$	a	$a\ b\ c$	$a\ b\ c$	$a\ b\ c\ d$
$a\ c$	a	$a\ b\ c$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$
$b\ c$	b	$b\ c$	$b\ c\ d$	$b\ c\ d$
$c\ d$	$c\ d$	$c\ d$	$c\ d$	$c\ d$
$a\ b\ c$	a	$a\ b\ c$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$

A 3.2.16. Állítás illusztrációja

Látható, hogy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ reflexív (R, D)-racionális.

Nézzük meg, hogyan érvényesül a 3.2.16. Állítás ezen valódi döntési mechanizmus néhány halmazán.

1. Legyen $X = \{a, b\}$. Válasszuk az $Y = \{c, d\}$ halmazt. Akkor

   $$(\mathcal{K}_C(X) \setminus X) \cap C(Y) = \{c\} \cap \{c, d\} = \{c\} \neq \emptyset.$$

   Másrészről, ha A az $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ halmazok valamelyike, akkor teljesül a $C(A) \cap X \neq \emptyset$ feltétel. Tehát, $Y \setminus (\cup A) = \{c, d\} \setminus \{a, b, c\} = \{d\} \neq \emptyset$. Így a (3.22) és (3.23) feltételek teljesülnek és a $\mathcal{H}_R(X)$ és $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$ közötti tartalmazás szigorú.

2. Legyen $X = \{a, c\}$. Ha A az $\{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}$ részhalmazok valamelyike, akkor teljesül a $C(A) \cap X \neq \emptyset$ feltétel, tehát $\cup A = \{a, b, c, d\}$. Másrészről, a $(\mathcal{K}_C(X) \setminus X) \cap C(Y) \neq \emptyset$ feltétel teljesül, ha Y a $\{c\}, \{b, c\}, \{c, d\}$ halmazok egyike. De bármelyiket is választjuk az Y halmazként, azt kapjuk, hogy $Y \setminus (\cup A) = \emptyset$, azaz az állítás feltételei nem teljesülnek, így $\mathcal{H}_R(X)$ és $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$ között egyenlőség van.

3. Legyen $X = \{b, c\}$. Ebben az esetben a (3.22) feltétel triviálisan nem teljesül, és $\mathcal{H}_R(X)$ és $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$ azonosak.

3.2.5. PÉLDA.

Definiáljuk a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ döntési mechanizmust a 11. Táblázat első két oszlopával. Az általa kinyilvánított Richter-relációt a 12. Táblázat mutatja. A 11. Táblázat következő oszlopai a C- és R-szerinti halmaz-kiterjesztéseket és a $\mathcal{K}_C(X)$ halmazok R-szerinti kiterjesztését adják.

11. Táblázat.

X	$C(X)$	$\mathcal{K}_C(X)$	$\mathcal{H}_R(X)$	$\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$
c	c	c	c	c
$a\ b$	b	$a\ b\ c$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$
$a\ c$	a	$a\ c\ d$	$a\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$
$a\ d$	a	$a\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$
$b\ c$	b	$a\ b\ c$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$
$b\ d$	$b\ d$	$b\ d$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$
$c\ d$	d	$c\ d$	$b\ c\ d$	$b\ c\ d$
$a\ c\ d$	a	$a\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$	$a\ b\ c\ d$

A 3.2.17. Állítás illusztrációja

12. Táblázat.

R	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	1	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	1	1	1

A 3.2.5. Példához tartozó Richter-reláció

Ha például

1. $X = \{a, c\}$, akkor $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)) \setminus X = \{b, d\}$ és $a \notin C(\{a, b\})$, $c \notin C(\{b, c\})$, tehát az állítás feltételei sérülnek. Az egyenlőség $\mathcal{H}_R(X)$ és $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$ között valóban nem érvényes.

2. $X = \{c, d\}$, akkor $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)) \setminus X = \{b\}$ és $d \in C(\{b, d\})$, tehát az állítás feltételei teljesülnek. Az egyenlőség $\mathcal{H}_R(X)$ és $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$ között érvényes, indeed.

3. $X = \{c\}$, akkor $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X)) \setminus X = \emptyset$, tehát az állítás feltételei triviálisan teljesülnek. Az egyenlőség $\mathcal{H}_R(X)$ és $\mathcal{H}_R(\mathcal{K}_C(X))$ között érvényes.

3.3. Döntésképes és stabil $(R, \textsc{d})$-racionalitás

Az előző fejezetben megvizsgáltuk, hogy a $\mathcal{H}_R$ ($\mathfrak{Im}_Z$) és a $\mathcal{K}_C$ operátorok által létrehozott új halmazok a tartalmazásra nézve milyen kapcsolatban vannak. Azt tapasztaltuk, hogy mindegyik operátorra jellemző, hogy az Ω halmaz elég gyakran megjelenik, mint kiterjesztő halmaz. Ez azért fontos észrevétel,, mert a valódi döntések esetén gyakran nincs olyan szempont, amely az összes alternatívát lefedi, azaz Ω rendszerint nem eleme az opcionális halmazrendszernek. A döntés pedig épp azt jelenti, hogy a teljes alternatíva-halmazból válasszuk ki a számunkra legjobb(ak)at. Ez még akkor is természetes követelmény, ha a szempontrendszer az alternatíva-halmaznak csak valódi részhalmazaira vonatkozik. Másrészt, nyilvánvalónak tűnik, hogy akkor döntésképes a kinyilvánított preferenciával racionális döntési mechanizmusunk, ha a teljes alternatívahalmazhoz nem üres kiválasztást rendel a kinyilvánított preferencia. Továbbá az is kérdés, hogy a kinyilvánított preferencia mennyire stabil, azaz milyen feltételek mellett lesz R-tartó bővítéssel tökéletes valódi döntési mechanizmussá bővíthető a döntési mechanizmus?

Vizsgálataink tehát ebben az alfejezetben arra terjednek ki, hogy a kinyilvánított $(R, \textsc{d})$-racionalizálás a $\mathfrak{B}$ halmazrendszerhez nem tartozó, nem üres halmazokon a kiválasztást milyen feltételek mellett határozza meg úgy, hogy az ne legyen üres halmaz.

3.3.1. Definíció.

*Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy olyan (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, ahol $\Omega \notin \mathfrak{B}$. Azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{D}$ valódi döntési mechanizmus (R, D)-*döntésképes*, ha $C_R^{\mathrm{D}}(\Omega) \neq \emptyset$.*

Egy döntésképes (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus nem feltétlenül kell, hogy reflexív legyen, de mindenképpen kell, hogy legalább egy $x \in \Omega$ esetén teljesüljön az xRx reláció.

3.3.1. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy olyan (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus, ahol $\Omega \notin \mathfrak{B}$. Ez a $\mathfrak{D}$ akkor és csak akkor lesz (R, D)-döntésképes, ha létezik olyan $x^* \in \Omega$ alternatíva, amelyre $Z(x^*) = \Omega$. Ekkor $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(\Omega)$.

Bizonyítás.

Az állítás a 3.1.3. Állítás következménye, ha azt az $X = \Omega$ halmazra alkalmazzuk. ♦

A 4.1.1. és 4.1.2. Példákban olyan valódi döntési mechanizmusokat mutatunk, amelyek nem (R, D)-döntésképesek.

Megjegyezzük, hogy a döntésképesség még nem vonja maga után, hogy minden $X' \notin \mathfrak{B}$ esetén $C_R^{\mathrm{D}}(X') \neq \emptyset$. Egy ilyen valódi döntési mechanizmust láthatunk a 3.3.1. Példában.

A következőkben most azt vizsgáljuk, hogy mikor nem lesz az $X' \notin \mathfrak{B}$ mindegyikén a kiválasztás nem üres.

3.3.2. Definíció.

*Egy (R, D)-racionális $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmust akkor tekintünk (R, D)-*stabil*nak, ha $C_R^{\mathrm{D}}(X) \neq \emptyset$ minden $X \in 2^{\Omega} \setminus \emptyset$ esetén.*

Egy stabil (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus mindig reflexív, mivel ha xRx nem teljesül valamely $x \in \Omega$ esetén, akkor $C_R^{\mathrm{D}}(\{x\}) = \emptyset$.

Bármely tökéletes (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus stabil.

3.3.2. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy* (R, D)*-racionális valódi döntési mechanizmus. Ez akkor és csak akkor* (R, D)*-stabil, ha minden* $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ *esetén létezik olyan* $x^*_X \in X$*, amelyre* $X \subseteq Z(x^*_X)$.

Bizonyítás.

Az állítás a 3.1.3. Állítás következménye, azt minden $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ halmaz esetére alkalmazva. ♦

3.3.3. Állítás.

Ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus* (R, D)*-stabil, akkor az* R *reláció teljes és* R^d *aciklikus.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy az R reláció nem teljes. Akkor létezik legalább egy olyan pár az $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ rendszerből, amelyre $x\overline{R}y$ és $y\overline{R}x$. Akkor viszont sem x sem y nem lehet kiválasztva az $\{x, y\} \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ részhalmazból, azaz $C^{\mathrm{D}}_R(\{x, y\}) = \emptyset$ ellentmondva a stabilitásnak.

Tegyük fel, hogy az R^d nem aciklikus. Akkor létezik olyan

$$X = \{z_1, \ldots, z_k\} \in 2^\Omega \setminus \emptyset$$

halmaz, hogy

$$z_i R^d z_{i+1} \ \ \forall i = 1, \ldots, k-1 \quad \text{és} \quad z_k R^d z_1.$$

Innét következik, hogy

$$z_{i+1}\overline{R}z_i \ \ \forall i = 1, \ldots, k-1 \quad \text{és} \quad z_1\overline{R}z_k,$$

vagyis $z_i \notin C^{\mathrm{D}}_R(X) \ \ \forall i = 1, \ldots, k$, így $C^{\mathrm{D}}_R(X) = \emptyset$, azaz ellentmondásba kerülünk a stabilitási feltétellel. ♦

Amint láthatjuk a 3.3.1. Példából a döntésképességből nem következik a stabilitás. De nyilvánvaló, hogy a döntésképesség hiánya maga után vonja az instabilitást. Egy egyidejűleg (R, D)-döntésképes és (R, D)-stabil valódi döntési mechanizmust mutat a 3.3.2. Példa.

3.3.1. Példák

A következő példákban feltételezzük, hogy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus és minden $a \in \Omega$ esetén $\{a\} \in \mathfrak{B}$. Így $C(\{a\}) = \{a\}$. Azonban az áttekinthetőbb leírás kedvéért a $\mathfrak{B}$ halmazrendszerben szereplő egyelemű halmazokat és azok triviális kiválasztását nem tüntetjük fel a példák döntési struktúráinak leírásában.

3.3.1. Példa.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, ahol az $\Omega = \{a, b, c, d\}$. $\mathfrak{B}$ halmazrendszer elemei, és az azokhoz tartozó kiválasztás, továbbá a kinyilvánított Richter-reláció a 13. Táblázatban adottak.

13. Táblázat.

$X \in \mathfrak{B}$	$C(X)$
$a\ b\ c$	$b\ c$
$b\ c\ d$	$c\ d$

A 3.3.1. Példa döntési struktúrája

R	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	1	1	1	0
c	1	1	1	1
d	0	1	1	1

A 3.3.1. Példához tartozó Richter reláció

Ebben a példában a valódi döntési mechanizmus döntésképes, mivel $C_R^{\mathrm{D}}(\Omega) = \{c\}$, de $C_R^{\mathrm{D}}(\{a, d\}) = \emptyset$, így nem stabil.

3.3.2. Példa.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, ahol $\Omega = \{a, b, c, d\}$. A $\mathfrak{B}$ halmazrendszer, és annak minden $X \in \mathfrak{B}$ halmazához a $C(X)$ kiválasztás, valamint a kinyilvánított Richter-reláció a 14. Táblázatban adottak.

Ez a valódi döntési mechanizmus egyidejűleg (R, D)-döntésképes és (R, D)-stabil.

14. Táblázat.

$X \in \mathfrak{B}$	$C(X)$
a b c	b c
a b d	b
b c	b c
a c	c
a d	d

3.3.2. Példa
döntési struktúrája

R	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	1	1	1	1
c	1	1	1	0
d	1	0	1	1

3.3.2. Példához tartozó
Richter reláció

3.4. A valódi döntési mechanizmus Richter-relációt megtartó szűkíthetősége

A valódi döntési mechanizmus szűkítése általában akkor merül fel, ha az opcionális halmazrendszer elemein redundánsnak tűnő kiválasztásokat észlelünk abban az értelemben, hogy a kinyilvánított Richter-reláció definiálásában valamelyik kiválasztás már nem játszik szerepet, vagy ha az ellentmondásos kiválasztásokat akarjuk kiszűrni a mechanizmusból.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, milyen feltételek mellett lehet az opcionális halmazrendszerből elhagyni egy halmazt, hogy a maradék rendszer olyan valódi döntési mechanizmus legyen, amely megőrzi az eredeti rendszer által kinyilvánított Richter-relációt.

3.4.1. Definíció.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy valódi döntési mechanizmus,* R *az általa kinyilvánított Richter-reláció és* $X' \in \mathfrak{B}$*. A*

$$\mathfrak{B}^- = \mathfrak{B} \setminus \{X'\} \tag{3.29}$$

opcionális halmazrendszerrel és a

$$C'(X) = C(X) \quad \forall X \in \mathfrak{B}^- \tag{3.30}$$

kiválasztási függvénnyel definiált $\mathfrak{D}^- = (\Omega, \mathfrak{B}^-, C')$ *struktúrát a* $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus* X'*-vel való* R-tartó szűkítésének *nevezzük, ha teljesül az*

$$R^- = R \tag{3.31}$$

egyenlőség, ahol R^- *a* $\mathfrak{D}^-$ *által kinyilvánított Richter-reláció.*

3.4.1. Állítás.

Az R*-tartó szűkítéssel definiált* $\mathfrak{D}^- = (\Omega, \mathfrak{B}^-, C')$ *struktúra valódi döntési mechanizmus.*

Bizonyítás.

A valódi döntési mechanizmus 2.1.3. Definiciójában szereplő kritériumok közül az 1., 2., 4. és 6. triviálisan teljesül. Azt kell megmutatnunk, hogy $\Omega = \bigcup_{X \in \mathfrak{B}^-} X$.

Tegyük fel, hogy $a \in \Omega$, de $a \notin \bigcup_{X \in \mathfrak{B}^-} X$. Mivel $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus, így $a \in \Omega = \bigcup_{X \in \mathfrak{B}} X$. Innét következik, hogy $a \in X'$, de $a \notin X$ $\forall X \in \mathfrak{B}^-$. Minthogy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus, ezért $C(X') \neq \emptyset$. Legyen $x \in C(X')$. Akkor xRa, de $x\overline{R^-}a$, így $R \neq R^-$, ami ellentmond az R-tartó szűkítés definíciójának. ♦

A (2.5) formula szerint a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ struktúrán definiált $Z(a)$ halmaz mellé, annak analógjára, definiáljuk a $\mathfrak{D}^- = (\Omega, \mathfrak{B}^-, C')$ struktúrán a

$$Z^-(a) = \bigcup \{Y \in \mathfrak{B}^- : a \in C(Y)\} \tag{3.32}$$

halmazt is.

3.4.2. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy valódi döntési mechanizmus és* $X' \in \mathfrak{B}$*. A (3.29) és (3.30) formulákkal adott* $\mathfrak{D}^- = (\Omega, \mathfrak{B}^-, C')$ *struktúra pontosan akkor lesz* R*-tartó szűkítés, ha teljesül a*

$$Z(a) = Z^-(a) \ \ \forall a \in C(X') \tag{3.33}$$

vagy a vele ekvivalens

$$\bigcap_{a \in C(X')} Z^{-}(a) \supseteq X' \tag{3.34}$$

feltétel.

Bizonyítás.

Először belátjuk a (3.33) feltétel szükségességét és elégségességét.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{D}^{-} = (\Omega, \mathfrak{B}^{-}, C')$ struktúra R-tartó szűkítés az X' halmazzal. Legyen $a \in C(X')$ és $y \in Z(a)$ tetszőleges. Felhasználva az R-tartó szűkítés $R = R^{-}$ feltételét, kapjuk a következő ekvivalenciasort:

$$\begin{aligned} y \in Z(a) \;&\Leftrightarrow\; \exists X \in \mathfrak{B} : a \in C(X), y \in X \\ &\Leftrightarrow\; aRy \\ &\Leftrightarrow\; aR^{-}y \\ &\Leftrightarrow\; \exists Y \in \mathfrak{B}^{-} : a \in C'(Y), y \in Y \\ &\Leftrightarrow\; y \in Z^{-}(a). \end{aligned}$$

Tegyük fel hogy $Z(a) = Z^{-}(a)$ teljesül minden $a \in C(X')$ esetén.

Legyenek $a \in \Omega$ és $y \in \Omega$ tetszőleges alternatívák. Ekkor

$$\begin{aligned} aR^{-}y \;&\Leftrightarrow\; \exists Y \in \mathfrak{B}^{-} \subset \mathfrak{B} : a \in C'(Y) = C(Y) \quad \text{és } y \in Y \\ &\Rightarrow\; aRy, \end{aligned}$$

vagyis $R^{-} \subseteq R$.

Másrészt

$$aRy \Leftrightarrow \exists Y \in \mathfrak{B} : a \in C(Y) \quad \text{és } y \in Y.$$

Ha $Y \neq X'$, akkor $Y \in \mathfrak{B}^{-}$, így $aR^{-}y$.

Ha $Y = X'$, akkor $a \in C(X')$ és $y \in X' \subseteq Z(a) = Z^{-}(a)$. Ez azt jelenti, hogy $\exists V \in \mathfrak{B}^{-} : a \in C'(V), y \in V$, vagyis $aR^{-}y$, azaz $R \subseteq R^{-}$.

A következőkben azt látjuk be, hogy (3.33) feltétel ekvivalens a (3.34) feltétellel. Valóban, figyelembe véve, hogy $\forall a \in C(X') : X' \subseteq Z^-(a)$ és $Z(a) = Z^-(a) \cup X'$, fennállnak a következő állítások közti ekvivalenciák:

$$Z(a) = Z^-(a) \;\; \forall a \in C(X')$$
$$\Leftrightarrow$$
$$X' \subseteq Z(a) = Z^-(a) \;\; \forall a \in C(X')$$
$$\Leftrightarrow$$
$$X' \subseteq Z^-(a) \cup X' = Z^-(a) \;\; \forall a \in C(X')$$
$$\Leftrightarrow$$
$$X' \subseteq \bigcap_{a \in C(X')} Z^-(a).$$

♦

4. (P_R,D)-racionális döntési mechanizmusok

Míg az előző fejezetben a valódi döntési mechanizmus módosításánál ahhoz ragaszkodtunk, hogy a kinyilvánított Richter-reláció ne változzon, azt tapasztaltuk, hogy ily módon nem feltétlenül lehet a $\mathfrak{B}$-n kívüli halmazok mindegyikét az opcionális halmazrendszerbe bevonni, azaz a döntési mechanizmusunk nem feltétlenül lesz döntésképes, még kevésbé stabil. A most következő vizsgálatainknál csak ahhoz fogunk ragaszkodni, hogy az eredeti döntési struktúrában a kiválasztás ne módosuljon valamilyen, az (R, D)-tól eltérő (P, D)-racionalitás mellett sem.

Vajon módosíthatjuk-e a kinyilvánított preferenciát úgy, hogy az opcionális halmazrendszeren ne változzon meg a kiválasztás, azaz a meglévő szempontrendszer szerinti választásainkat ne befolyásolja?

4.1. Bővített (R, D)-racionalizálás

A 2.2.5. Állításból tudjuk, hogy ha létezik a fejezet bevezetésében említett feltételt kielégítő P racionalizáló reláció, akkor azt az $R \subseteq P$ implikációt teljesítő relációk között kell keresnünk.

Mint említettük a 2.2. alfejezetben, egy racionalizálható valódi döntési mechanizmusnak több racionalizálása is lehet. Ezeket kívánjuk karakterizálni ebben az alfejezetben.

4.1.1. DEFINÍCIÓ.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy* (R, D)*-racionális valódi döntési mechanizmus. A* P_R *relációt a* $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított* bővített (R, D)-racionalizálásnak *nevezzük, ha*

$$R \subset P_R$$

és

$$C^{\text{D}}_{P_R}(X) = C^{\text{D}}_R(X) \;\; \forall X \in \mathfrak{B}.$$

A $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított bővített* (R, D)*-racionalizálások halmazát jelölje* $\mathcal{P}_R$*.*

Nem nehéz találni olyan (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmust, amelynek nincs a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ által kinyilvánított bővített (R, D)-racionalizálása (ld.4.1.1. Példa). Másrészről viszont előfordulhat, hogy egy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmusnak több különböző, általa kinyilvánított bővített (R, D)-racionalizálása is van (ld. 4.1.2. Példa).

Mint a fent említett példákból is kitűnik, vannak olyan $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ alternatívapárok, amelyekre fennáll, hogy $x\overline{R}y$, de ezeken a párokon nem lehet módosítani a Richter-relációt az opcionális halmazrendszerbe tartozó halmazok kiválasztásának módosulása nélkül.

Ezek kezelésére vezessük be a következő relációt:

4.1.2. Definíció.

Azt mondjuk, hogy a P *relációnak a* P_{sc} *reláció* szigorúan komplemens része $\Omega \times \Omega$ *halmazon, ha*

$$\begin{aligned} xP_{\mathrm{sc}}y \Leftrightarrow \quad & x\overline{P}y \text{ és} \\ & \exists Y \in \mathfrak{B} : x, y \in Y, x \notin C_P^{\mathrm{D}}(Y), \text{ de } xPz \ \forall z \in Y \setminus \{y\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

A P reláció szigorúan komplemens P_{sc} része pontosan azokat az alternatívapárokat határozza meg, ahol nem lehet módosítani a Richter relációt az opcionális halmazrendszerbe tartozó halmazok kiválasztásának módosulása nélkül.

Először azt vizsgáljuk, hogyan lehet jellemezni azokat az (R, D)-racionális döntési mechanizmusokat, amelyeknek nincs bővített (R, D)-racionalizálása. A következő állítás egy elégséges feltételt ad válaszul.

4.1.1. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ *egy* (R, D)*-racionális valódi döntési mechanizmus, ahol a* $\mathfrak{B}$ *opcionális halmazrendszer kielégíti a következő feltételeket:*

1. $\mathfrak{B}$ *tartalmazza* Ω *minden kételemű részhalmazát;*

2. Minden $a \in \Omega$ esetén létezik olyan $X \in \mathfrak{B}$ amelyre $a \in C(X)$.

Akkor $\mathcal{P}_R = \emptyset$.

Bizonyítás.

Először is vegyük figyelembe, hogy a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ által kinyilvánított R reláció reflexív. Ugyanis, ha $a \in \Omega$ egy tetszőlegesen választott alternatíva, akkor az állítás második feltételéből következik, hogy létezik olyan $X \in \mathfrak{B}$, amelynek kiválasztására teljesül, hogy $a \in C(X)$. Tehát a Richter reláció definíciója szerint aRa.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik $P_R \supset R$, amelyre teljesül, hogy

$$C^{\mathrm{D}}_{P_R}(X) = C^{\mathrm{D}}_{R}(X) \ \ \forall X \in \mathfrak{B}.$$

$P_R \supset R$ azt jelenti, hogy léteznek olyan $a, b \in \Omega$ alternatívák, amelyekre aP_Rb, ugyanakkor $a\overline{R}b$ és $a\overline{R_{\mathrm{sc}}}b$ is teljesül. A reflexívitásból következik, hogy $a \neq b$. Mivel $a\overline{R}b$ és a feltétel szerint $\{a, b\} \in \mathfrak{B}$, ezért $C(\{a, b\}) = \{b\}$. Ebből viszont az következik, hogy $aR_{\mathrm{sc}}b$, ami ellentmond a feltételnek. ♦

4.1.1.1. KÖVETKEZMÉNY.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy $(R,$ D$)$-racionális valódi döntési mechanizmus, ahol a $\mathfrak{B}$ opcionális halmazrendszer tartalmazza Ω minden egyelemű és kételemű részhalmazát. Akkor $\mathcal{P}_R = \emptyset$.

Bizonyítás.

Triviális. ♦

Az az eset, amikor biztosan tudjuk, hogy $\mathcal{P}_R \neq \emptyset$, a WARP segítségével fogalmazható meg.

4.1.2. ÁLLÍTÁS.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy $(R,$ D$)$-racionális valódi döntési mechanizmus és a kinyilvánított Richter- és Samuelson-relációk között az $R \subset S^d$ szigorú tartalmazás áll fenn. Akkor $S^d \in \mathcal{P}_R$.

Bizonyítás.

S^d nyilván bővítése R-nek, a 2.2.9. Állítás pedig garantálja, hogy $\mathfrak{B}$ halmazain a kiválasztás ne változzon meg. ♦

A 4.1.2. Példa azonban arra is rámutat, hogy $R = S^d$ esetén is lehet R-nek, akár több bővített (P_R, D)-racionalizálása.

Ahhoz, hogy a relációk egyes elemeit külön-külön is kezelni tudjuk, vezessük be a következő relációt:

4.1.3. Definíció.

A P reláció $(a, b) \in \Omega \times \Omega$ alternatívapárhoz tartozó atomizációja *az a Q^{ab} reláció, amelyet a következő módon definiálunk:*

$$xQ^{ab}y \Leftrightarrow x = a, y = b \text{ és } aPb. \tag{4.2}$$

Jelölje a P reláció atomizációinak halmazát $\mathcal{Q}(P)$.

A 4.1.2. Példa 18. Táblázata az R_{sc} és az atomizáció képzését mutatja be.

4.1.3. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (R, D)-racionális valódi döntési mechanizmus. A P_R reláció akkor és csak akkor lesz egy, a $\mathfrak{D}$ által kinyilvánított bővített (R, D)-racionalizálás , ha az R relációhoz létezik olyan $\{P^{(i)},\ i = 0, \ldots, k\}$ $k \geqslant 1$ véges relációlánc, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:

1. $P^{(0)} = R$; $P^{(i-1)} \subset P^{(i)},\ i = 1, \ldots, k$; $P^{(k)} = P_R$;
2. *Minden $i = 1, \ldots, k$ esetén létezik olyan $(a_i, b_i) \in \Omega \times \Omega$ alternatívapár, amelyre*

   $$P^{(i)} \cap \overline{P^{(i-1)}} = Q^{a_i b_i}_{i-1} \in \mathcal{Q}_{i-1},$$

   ahol $\mathcal{Q}_{i-1} = \mathcal{Q}(\overline{P^{(i-1)}} \cap \overline{P^{(i-1)}_{\mathrm{sc}}})$ és $P^{(i-1)}_{\mathrm{sc}}$ a $P^{(i-1)}$ reláció szigorúan komplemens része.

A lánc k hosszát az R és a *P_R* relációk közti távolság*nak fogjuk nevezni és $d(R, P_R)$-rel jelöljük.*

Bizonyítás.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy $\{P^{(i)},\ i = 0, \ldots, k\}$ $k \geqslant 1$ olyan véges relációlánc, ami teljesíti az állításban megkövetelt feltételeket. Mivel

$$P^{(i)} \cap \overline{P^{(i-1)}} = Q^{a_i b_i}_{i-1} \in \mathcal{Q}_{i-1},$$

ezért $Q^{a_i b_i}_{i-1} \nsubseteq P^{(i-1)}_{sc}$, tehát a szigorúan komplemens rész definíciója szerint minden $i = 1, \ldots, k$ esetén a $Q^{a_i b_i}_{i-1}$ reláció a $P^{(i-1)}$ reláción csak úgy változtat, hogy az nincs hatással a $\mathfrak{B}$ opcionális halmazrendszer halmazainak kiválasztásaira. Tehát minden $X \in \mathfrak{B}$ és minden $i = 1, \ldots, k$ esetén

$$C^{\mathrm{D}}_{P^{(i)}}(X) = C^{\mathrm{D}}_{P^{(i-1)}}(X).$$

Következésképpen,

$$\begin{aligned} C(X) &= C^{\mathrm{D}}_{R}(X) = C^{\mathrm{D}}_{P^{(0)}}(X) = \ldots = C^{\mathrm{D}}_{P^{(i-1)}}(X) = C^{\mathrm{D}}_{P^{(i)}}(X) = \\ &= \ldots = C^{\mathrm{D}}_{P^{(k)}}(X) = C^{\mathrm{D}}_{P_R}(X) \quad \forall X \in \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Így, minden $i = 1, \ldots, k$ esetén a $P^{(i)}$ reláció a $\mathfrak{D}$ által kinyilvánított bővített $(R, \textsc{d})$-racionalizálás.

Szükségesség. Legyen P_R egy $\mathcal{D}$ által kinyilvánított bővített $(R, \textsc{d})$-racionalizálás. Akkor

$$\emptyset \neq P_R \cap \overline{R} = \bigcup_{i=1}^{k} Q^{a_i b_i} \subseteq \overline{R_{\mathrm{sc}}} \cap \overline{R},$$

ahol $Q^{a_i b_i} \in \mathcal{Q}(\overline{R_{\mathrm{sc}}} \cap \overline{R})$. Másrészről

$$\begin{aligned} P_R &= R \cup (\bigcup_{i=1}^{k} Q^{a_i b_i}) = \\ &= ((R \cup Q^{a_1 b_1}) \cup Q^{a_2 b_2}) \ldots \cup Q^{a_k b_k} \end{aligned}$$

Bevezetve a

$$P^{(0)} = R; \ \ P^{(i)} = P^{(i-1)} \cup Q^{a_i b_i}, \ i = 1 \ldots, k; \ \ P^{(k)} = P_R$$

relációkat, megkapjuk azt a láncot, amely generálja a P_R relációt. Mivel P_R egy bővített (R, D)-racionalizálás, ezért a bővítés nem változtat $\mathfrak{B}$ opcionális halmazrendszer halmazainak kiválasztásán, tehát, a $P^{(i)}$ relációk egyike sem változtat rajta. Eszerint az $Q^{a_i b_i} \in \mathcal{Q}_{i-1}$ kell legyen minden $i = 1, \ldots, k$ esetén. ♦

Az Algoritmus 1 azt mutatja meg, hogyan képezhetjük a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus által kinyilvánított bővített (R, D)-racionalizálások $\mathcal{P}_R$ halmazát.

Algoritmus 1 Bővített (R, D)-racionalizálások képezése

$\mathcal{P}_R \Leftarrow \emptyset$ {bővített (R, D)-racionalizálások halmazának inicializálása}
$\mathcal{P} \Leftarrow \{R\}$ {kiinduló reláció a Richter reláció}
while $\mathcal{P} \neq \emptyset$ **do**
  select $P \in \mathcal{P}$
  define P_{sc}
  $\mathcal{Q} \Leftarrow$ a $\overline{P} \cap \overline{P_{\text{sc}}}$ reláció Q^{ij} atomizációinak halmaza
  while $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ **do**
    select $Q^{ij} \in \mathcal{Q}$
    $P_R \Leftarrow P_R \cup (\overline{P} \cap Q^{ij})$
    $\mathcal{P}_R \Leftarrow \mathcal{P}_R \cup \{P_R\}$
    $\mathcal{P} \Leftarrow \mathcal{P} \cup \{P_R\}$
  end while{atomizációk}
  $\mathcal{P} \Leftarrow \mathcal{P} \setminus \{P_R\}$
end while{racionalizálás}
return $\mathcal{P}_R$

4.1.1. Példák

4.1.1. PÉLDA.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, ahol $\Omega = \{a, b, c, d\}$. A $\mathfrak{B}$-beli halmazokat a hozzájuk tartozó kiválasztással és a kinyilvánított Richter-relációt a 15. Táblázat szemlélteti.

15. Táblázat.

$X \in \mathfrak{B}$	$C(X)$
a b	b
a c	a
a d	d
b c	c
b d	b
c d	c d

A 4.1.1. Példa kiválasztási struktúrája

R	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	1	1	0	1
c	0	1	1	1
d	1	0	1	1

A 4.1.1. Példához tartozó Richter-reláció

Ez a valódi döntési mechanizmus (R, D)-racionális, de a Richter- reláció semmilyen bővítése nem lesz (R, D)-racionalizálás.

4.1.2. PÉLDA.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus, ahol $\Omega = \{a, b, c, d\}$. A $\mathfrak{B}$-beli halmazokat a hozzájuk tartozó kiválasztással és a kinyilvánított Richter-relációt a 16. Táblázat szemlélteti.

16. Táblázat.

$X \in \mathfrak{B}$	$C(X)$
a b c	c
a b	b
b c	c
b c d	d
a d	a

A 4.1.2. Példa kiválasztási struktúrája

R	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	1	1	0	0
c	1	1	1	0
d	0	1	1	1

A 4.1.2. Példához tartozó Richter-reláció

Ellenőrizhető, hogy a 4.1.2. Példában a döntési mechanizmus (R, D)-racionális, és három különböző bővített (R, D)-racionalizálása is létezik, amely megőrzi az opcionális halmazrendszerbeli kiválasztásokat. Ezek a bővített (R, D)-racionalizálások láthatóak a 17. Táblázatban.

17. Táblázat.

P_1	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	1	1	0	0
c	1	1	1	0
d	0	1	1	1

P_2	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	1	1	0	1
c	1	1	1	0
d	0	1	1	1

P_3	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	1	1	0	1
c	1	1	1	0
d	0	1	1	1

A 4.1.2. Példához tartozó

(P_1, D)-racionalizálás (P_2, D)-racionalizálás (P_3, D)-racionalizálás

A 18. Táblázatban a 4.1.2. Példához tartozó R reláció szigorúan komplemens R_{sc} része és az $\mathcal{Q}(\overline{R} \cap \overline{R_{\mathrm{sc}}})$-hoz tartozó Q^{ac} és Q^{bd} atomizációk láthatók.

18. Táblázat.

R_{sc}	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	1	0
c	0	0	0	1
d	1	0	0	0

A 4.1.2. Példához tartozó R_{sc} reláció

Q^{ac}	a	b	c	d
a	0	0	1	0
b	0	0	0	0
c	0	0	0	0
d	0	0	0	0

Q^{bd}	a	b	c	d
a	0	0	0	0
b	0	0	0	1
c	0	0	0	0
d	0	0	0	0

A 4.1.2. Példához tartozó $\mathcal{Q}(\overline{R} \cap \overline{R_{\mathrm{sc}}})$ relációhalmaz

4.2. Gyengén (R, D)-döntésképes és gyengén (R, D)-stabil valódi döntési mechanizmusok

A legtöbb gyakorlati döntési probléma esetén sem az (R, D)-döntésképesség, sem pedig a (R, D)-stabilitás nincs garantálva. Ha van a kinyilvánított preferenciának olyan bővítése, amely megtartja az opcionális halmaz elemeihez tartozó kiválasztásokat, akkor vajon tudunk-e már a teljes Ω halmazból is választani? Vagy van-e olyan bővítése a kinyilvánított preferenciának, amely mellett minden $\mathfrak{B}$-beli halmaz kiválasztása megőrződik, de a $\mathfrak{B}$-n kivüli halmazokhoz hozzárendelt kiválasztás sem lesz üres. Ebben a fejezetben ez a kérdéssor motiválja a vizsgálatainkat. Ehhez a döntésképesség és a stabilitás fogalmát kiterjesztjük a bővített (R,D)-racionalizálásokra is.

4.2.1. Definíció.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (R,D)-racionális valódi döntési mechanizmus és $\Omega \notin \mathfrak{B}$. Azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus gyengén (R,D)-döntésképes*, ha nem (R,D)-döntésképes, de létezik olyan $P_R \supset R$ bővített (R,D)-racionalizálás, amelyre $C^{\mathrm{D}}_{P_R}(\Omega) \neq \emptyset$ és a $d(R, P_R)$ távolság minimális.*

4.2.2. Definíció.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (R,D)-racionális valódi döntési mechanizmus. $\mathfrak{D}$-t gyengén (R,D)-stabil*nak mondjuk, ha nem (R,D)-stabil, de létezik olyan $P_R \supset R$ bővített (R,D)-racionalizálás, amelyre minden $X \in 2^\Omega \setminus \emptyset$ halmaz esetén $C^{\mathrm{D}}_{P_R}(X) \neq \emptyset$ és a $d(R, P_R)$ távolság minimális.*

4.2.1. Állítás.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy (R,D)-racionális valódi döntési mechanizmus. Legyen $X \in (2^\Omega \setminus \emptyset) \setminus \mathfrak{B}$. Akkor és csak akkor létezik olyan $P_R \supset R$ bővített (R,D)-racionalizálás, melyre $d(R, P_R)$ távolság minimális és $C^{\mathrm{D}}_{P_R}(X) \neq \emptyset$, ha van olyan $x^* \in X$, amelyre a következő feltételek valamelyike teljesül:

1. *$X \subseteq Z(x^*) = \Omega$ és $\exists (x, y) \in \Omega \times \Omega$ úgy, hogy $x \neq x^*$, $x\overline{R}y$ és $x\overline{R_{\mathrm{sc}}}y$;*
2. *$X \subseteq Z(x^*)$, $\Omega \setminus Z(x^*) \neq \emptyset$ és létezik olyan $y \in \Omega \setminus Z(x^*)$ amelyre $x^*\overline{R}y$ és $x^*\overline{R_{\mathrm{sc}}}y$;*
3. *$X \setminus Z(x^*) \neq \emptyset$ és minden $Y \in \mathfrak{B}$ esetén ha $x^* \in Y$, akkor vagy $Y \subseteq Z(x^*)$ vagy $(Y \setminus Z(x^*)) \setminus (X \setminus Z(x^*)) \neq \emptyset$ teljesül.*

Bizonyítás.

A 3.1.3. Állítás szerint, ha $x^* \in X \subseteq Z(x^*)$, akkor $x^* \in C^{\mathrm{D}}_R(X) \neq \emptyset$. Tehát a minimális távolság $d(R, P_R) = 1$. Így $\overline{R} \cap \overline{R_{\text{sc}}}$ bármely atomizációja lehet bővítő. Ez azt jelenti, hogy

$$P_R = P^{(1)} = P^{(0)} \cup Q_0^{x,y} = R \cup Q_0^{x,y},$$

ahol $Q_0^{x,y}$ tetszőleges atomizációja a $\overline{R} \cap \overline{R_{\text{sc}}}$ relációnak és $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ olyan alternatívapár, amely kielégíti az $x\overline{R}y$ és az $x\overline{R_{\text{sc}}}y$ relációkat.

Amennyiben $\Omega = Z(x^*)$, akkor szükséges, hogy $Q_0^{x,y}$ olyan atomizáció legyen, ahol $(x, y) \in (\Omega \setminus \{x^*\}) \times \Omega)$.

Ha $\Omega \setminus Z(x^*) \neq \emptyset$, akkor az $Q_0^{x,y}$ olyan atomizáció, ahol $(x, y) \in \{x^*\} \times (\Omega \setminus Z(x^*))$.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $X \setminus Z(x^*) = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Mivel megköveteljük, hogy a keresett P_R relációra vonatkozólag a $d(R, P_R)$ távolság minimális legyen és $x^* \in C^{\text{D}}_{P_R}(X)$, így P_R a

$$P^{(0)} = R,\ P^{(i-1)} = P^{(i)} \cup Q^{x^*,y_i},\ P_R = P^{(k)},$$

relációlánccal adható meg, ahol a $Q^{a,b}$ atomizációt a (4.2). Definíció szerint értelmezzük, azaz

$$P_R = R \bigcup (\bigcup_{y \in X \setminus Z(x^*)} Q^{x^*,y}). \tag{4.3}$$

Ez a P_R reláció akkor és csak akkor lesz egy bővített $(R,$ D$)$-racionalizálás, ha nem létezik olyan $Y \in \mathfrak{B}$ amelyre $x^* \notin C(Y) = C^{\text{D}}_R(Y)$, de $x^* \in C^{\text{D}}_{P_R}(Y)$.

Vegyünk egy tetszőleges $Y \in \mathfrak{B}$ halmazt és bontsuk fel a következő halmazok uniójára:

$$Y = (Y \cap Z(x^*)) \cup ((Y \setminus Z(x^*)) \cap (X \setminus Z(x^*))) \cup ((Y \setminus Z(x^*)) \setminus (X \setminus Z(x^*))).$$

Ekkor

$$x^* R y \qquad \forall y \in Y \cap Z(x^*) \tag{4.4}$$

$$x^* \overline{R} y\ ,\ \text{de}\ \ x^* P_R y \quad \forall y \in (Y \setminus Z(x^*)) \cap (X \setminus Z(x^*)) \tag{4.5}$$

$$x^* \overline{R} y\ ,\ \text{és}\ \ x^* \overline{P_R} y \quad \forall y \in (Y \setminus Z(x^*)) \setminus (X \setminus Z(x^*)). \tag{4.6}$$

Ebből következik, hogy Y halmaz kiválasztása csupán a következő két esetben nem változik meg:

a) Ha $Y \setminus Z(x^*) = \emptyset$, azaz csak az (4.4) feltétel teljesül. Ebben az esetben $Y \subseteq Z(x^*)$ így a 3.1.3. Állítás szerint $x^* \in C(Y)$.

b) Ha van olyan $y \in Y$, amelyre $y \in (Y \setminus Z(x^*)) \setminus (X \setminus Z(x^*))$, akkor erre az alternatívára teljesül, hogy $x^* \overline{R} y$ és $x^* \overline{P_R} y$. Tehát $x^* \notin C(Y) = C_R^{\mathrm{D}}(Y)$ és $x^* \notin C_{P_R}^{\mathrm{D}}(Y)$. ♦

4.2.2. Állítás.

Az (R, D)-racionális $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus akkor és csak akkor gyengén (R, D)-döntésképes, ha létezik olyan $x^* \in \Omega$, amelyre teljesül, hogy minden olyan $Y \in \mathfrak{B}$ halmazra, amelyre $x^* \in Y$ teljesül az $Y \subseteq Z(x^*)$ tartalmazás.

Bizonyítás.

Ez a 4.2.1. Állítás alkalmazása $X = \Omega$ esetére. Megmutatjuk, hogy bármely, az $Y \subseteq Z(x^*)$- tól eltérő feltétel ellentmondáshoz vezet. Valóban, az 2. feltétel ebben az esetben az ellentmondó $\Omega \subseteq Z(x^*)$ és $\Omega \setminus Z(x^*) \neq \emptyset$ feltételek miatt eleve nem jöhet szóba. Az 1. feltétel azt jelentené, hogy $x^* \in C_R^{\mathrm{D}}(\Omega)$, azaz $\mathfrak{D}$ döntésképes lenne.

Ha lenne olyan $Y \in \mathfrak{B}$, melyre a 3. feltétel második része teljesülne, akkor erre a halmazra az $y^* \in Y \setminus Z(x^*)$ és $y^* \notin \Omega \setminus Z(x^*)$. Az utóbbi tartalmazás ekvivalens az $y^* \in \mathbb{Z}(x^*)$ feltétellel, ami viszont ellentmond az első feltételnek. ♦

4.2.3. Állítás.

Az (R, D)-racionális $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus akkor és csak akkor gyengén (R, D)-stabil, ha bármely $X \in (2^\Omega \setminus \emptyset) \setminus \mathfrak{B}$ halmaz esetén van olyan $x_X^* \in X$, amelyre minden olyan $Y \in \mathfrak{B}$ esetén, ahol $x^* \in Y$, az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:

1. $Y \subseteq Z(x_X^*)$;
2. $(Y \setminus Z(x_X^*)) \cap (X \cap Z(x^*)) \neq \emptyset$.

Bizonyítás.

Ez a 4.2.1. Állítás alkalmazása valamennyi $X \in (2^\Omega \setminus \emptyset) \setminus \mathfrak{B}$ halmazra.

2^Ω a következőképpen particionálható:

$$2^\Omega = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2,$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1 &= \{X \in 2^\Omega : X \notin \mathfrak{B}, \exists x_X^* : X \subseteq Z(x_X^*)\} \\
\mathfrak{B}_2 &= \{X \in 2^\Omega : X \notin \mathfrak{B}, \nexists x_X^* : X \subseteq Z(x_X^*)\} \\
&= \{X \in 2^\Omega : X \notin \mathfrak{B}, \forall x^* \in X : X \setminus Z(x^*) \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

$\mathfrak{B}_1$ konstrukciója garantálja, hogy a $\mathfrak{B}_1$-beli halmazokra terjesül az állítás feltétele. Másrészt $\mathfrak{B}_2 \neq \emptyset$, mivel ellenkező esetben $X \in \mathfrak{B}_1 \quad \forall X \notin \mathfrak{B}$ lenne, így $\mathfrak{B}_1$ konstrukciójából következően minden $X \in \mathfrak{B}_1$ esetén $x_X^* \in C_R^{\mathrm{D}}(X)$ lenne, vagyis $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ stabil lenne.

$\mathfrak{B}_2$ konstrukciójából viszont következik, minden $X \in \mathfrak{B}_2$ esetén a 4.2.1. Állítás 3. feltételének kell taljesülnie. ♦

4.2.4. Állítás.

Ha a $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus gyengén (R, D)-stabil, akkor bármely $P_R \supset R$ bővített (R, D)-racionalizálás teljes és P_R^d aciklikus.

Bizonyítás.

A bizonyítás analóg módon történik, mint a 3.3.3. Állítás bizonyítása. ♦

A 4.2.1. Példában egy gyengén döntésképes, de nem gyengén stabil, míg a 4.2.2. Példában egy gyengén döntésképes és gyengén stabil valódi döntési mechanizmusra láthatunk példát.

4.2.1. Példák

4.2.1. Példa.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, ahol $\Omega = \{a, b, c, d\}$. A $\mathfrak{B}$ halmazrendszer, és annak minden $X \in \mathfrak{B}$ halmazára a $C(X)$ kiválasztás, továbbá a kinyilvánított Richter-reláció és a bővített (R, D)-rationalizálás a 19. Táblázatban adottak.

19. Táblázat.

$X \in \mathfrak{B}$	$C(X)$
$a\ b\ c$	a
$b\ c\ d$	b
$a\ c$	a
$b\ d$	$b\ d$
$b\ c$	$b\ c$

A 4.2.1. Példa döntési struktúrája

R	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	1
c	0	1	1	0
d	0	1	0	1

A 4.2.1. Példához tartozó Richter reláció

P_R	a	b	c	d
a	1	1	1	**1**
b	0	1	1	1
c	0	1	1	0
d	0	1	0	1

A 4.2.1. Példához tartozó bővített (R,D)-racionalizálás

Ebben a példában a valódi döntési mechanizmus gyengén döntésképes, hiszen $C^{\mathrm{D}}_{P_R}(\Omega) = \{a\}$, de nem gyengén stabil, mert $C^{\mathrm{D}}_{P_R}(\{c,d\}) = \emptyset$ és sem cP_Rd, sem pedig dP_Rc nem teljesülhet, mivel $cR_{\mathrm{sc}}d$ és $dR_{\mathrm{sc}}c$.

4.2.2. PÉLDA.

Legyen $\mathfrak{D} = (\Omega, \mathfrak{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, ahol $\Omega = \{a,b,c,d\}$. A $\mathfrak{B}$ halmazrendszert, és annak minden $X \in \mathfrak{B}$ halmazára a $C(X)$ kiválasztást, valamint a kinyilvánított Richter-relációt és a bővített (R,D)-rationalizálást a 20. Táblázat adja.

Az így adott valódi döntési mechanizmus gyengén döntésképes és gyengén stabil.

20. Táblázat.

$X \in \mathfrak{B}$	$C(X)$
a b	a
b c	b c
c d	d

A 4.2.2. Példa döntési struktúrája

R	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	0	1	1	0
c	0	1	1	0
d	0	0	1	1

A 4.2.2. Példához tartozó Richter-reláció

P_R	a	b	c	d
a	1	1	**1**	**1**
b	0	1	1	**1**
c	0	1	1	0
d	0	0	1	1

A 4.2.2. Példához tartozó bővített (R, D)-racionalizálás

Irodalomjegyzék

[1] Aizerman, M. A., New problems on general choice theory: Review of research trend, *Social Choice and Welfare*, **2**(4) (1985), 235-282.

[2] Aizerman, M. A., Some new issues in general theory of choice (A survay of one line of research), *Automation and Remote Control*, **45**(9) Part 1. (1984), 5-43, ([57] angol fordítása).

[3] Aizerman, M. A., Aleskerov F., *Theory of choice*. North Holland, 1995.

[4] Aizerman, M., Malishevski, V. A. General theory of best variants choice: Some aspects, *IEEE Trans. Automat. Control*, **26**(5) (1981), 1030-1041.

[5] Aizerman, M., Malishevski, V. A. Some aspects of general theory of best option choice, *Automation and Remote Control*, **52**(2) Part 1. (1981), 65-83, ([58] angol fordítása).

[6] Arrow, K. J., Rational choice functions and orderings, *Economica*, **26** (1959), 121-127.

[7] Blair, D. H., Pollak, R. A., Acyclic collective choice rules, *Econometrica*, **50**(4) (1982), 931-943.

[8] Bodó, B., On the choice-revealed extension operators, *Annal. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.,* **26** (2006), 105-125.

[9] Bodó, B., A kiválasztási függvény racionalitása és racionalizálhatósága az opcionális halmazrendszer függvényében, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, **25** (2008), 47-59.

[10] Bodó, B., Kovács, M., On the stability of the R-rational choice function, *Annal. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.*, **28** (2008), 79-95.

[11] Bossert, W., Choices, consequences and rationality, *Synthese,* **129** (2001), 343-369.

[12] BOSSERT, W., SPRUMONT, Y., and SUZUMURA, K., Consistent rationalizability, *Economica*, **72** (2005), 185-200.

[13] BOSSERT, W., SPRUMONT, Y., and SUZUMURA, K., Rationalizability of choice function on general domains without full transitivity, *Social Choice and Welfare*, **27** (2006), 435-458.

[14] CHERNOFF, H. Rational selection of decision functions. *Econometrica*, **22** (1954), 422-443.

[15] CLARK, S. A., A complementary approach to the strong and weak axioms of revealed preference, *Econometrica,* **53**(6) (1985), 1459-1463.

[16] CLARK, S. A., An extension theorem for rational choice function, *The Review of Economic Studies,* **LV** (1988), 485-492.

[17] CLARK, S. A., Indecisive choice function, *Mathematical Social Sciences* **30** (1995) 155-170.

[18] DANILOV, V., KOSHEVOY, G., Mathematics of Plott choice functions, *Mathematical Social Sciences*, **49**(3) (2005), 245-272.

[19] DANILOV, V., KOSHEVOY, G., A new characterization of the path independent choice functions, *Social Choice and Welfare*, **51**(2) (2006), 238-245.

[20] DEB, B., Binariness and rational choice, *Mathematical Social Sciences* **5** (1983), 97-106.

[21] DEMETROVICS, J., HENCSEI, G., LIBKIN, L. and MUCHNIK, I. On the interaction between closure operations and choice functions with applications to relational databases, *Acta Cybernetica* **10**(3) (1992), 129-139.

[22] DEMUYNCK, TH. *Binary extensions and choice theory*, Dissertation, Ghent University, 2008.

[23] FISHBURN, P. C., Representable choice functions, *Econometrica* **44**(5) (1976), 1033-1043.

[24] Hansson, B., Choice structures and preference relations, *Synthese*, **18**(1968), 443-458.

[25] Herzberger, H. G., Ordinar preference and rational choice, *Econometrica*, **41** (1973), 187-237.

[26] Houthakker, H. S., Revealed preference and the utility function, *Economica*, **17** (1966), 635-645.

[27] Kortelainen J., On the relationship between modified sets, topological spaces and rough sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **61** (1994), 91-95.

[28] Koshevoy G. A., Choice functions and abstract convex geometry, *Mathematical Social Sciences*, **38** (1999), 35-44.

[29] Kovács, M., Rádonyi, Á. and Rózsa, K., The application of valued choice functions in group-decision, In: *Proc. MS'2000 Int. Conf. of Modelling and Simulation, Las Palmas de Gran Canaria, 2000.* 933-940.

[30] Lezina Z. M. Manipulation of option choice system, *Automation and Remote Control*, **46**(4) Part 1. (1985), 5-22, ([60] angol fordítása).

[31] Magyarkuti, Gy., Note on generated choice and axioms of revealed preferences, *Central European Journal of Operation Research*, **8** (2000), 57-62.

[32] Magyarkuti, Gy., *A racionalitás fogalmának axiomatikus megközelítése.* Ph.D. értekezés, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, Közgazdaságtani Ph.D. program, 2001.

[33] Makarov, I. M., Vinogradskaya, T. M., Rubchinsky, A. A. and Sokolov, V. B., *The Theory of Choice and Decision Making*, Mir Publishers, Moscow, 1982. ([61] angol fordítása)

[34] Moulin, H. Choice functions over a finite set: A summary, *Social Choice and Welfare*, **2** (1985), 147-160.

[35] Plott, C. R., Path independence, rationality and social choice, *Econometrica*, **41**(6) (1973), 1075-1091.

[36] Richter, M. K., Revealed preference theory, *Econometrica*, **34**(3) (1966), 635-645.

[37] Richter, M. K., Rational choice, In: J.S. Chipman *et al.*, eds., *Preference, Utility and Demand*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971. 29-58.

[38] Rodríguez-Galiano, M. I., Rationalization of choice functions, *Top*, **8**(2) (2000), 311-326.

[39] Roubens, M., Vincke, Ph., *Preference modelling*, LNEMS **250**, Springer-Verlag, 1985.

[40] Samuelson P. A., A note on the pure theory of consumers's behavior, *Economica*, **5** (1938), 61-71.

[41] Samuelson P. A., *Foundation of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947.

[42] Samuelson P. A., A consumption theory in terms of revealed preference, *Economica*, **15** (1948), 243-253.

[43] Schwartz, T. Choice functions, rationality conditions and variations on the weak axiom of revealed preferences, *Journal of Economic Theory*, **13** (1976), 414-427.

[44] Sen, A. K., *Collective choice and social welfare,* Holden-Day, San Francisco, 1970.

[45] Sen, A. K., Choice functions and revealed preference, *Review of Economic Studies*, **38**(3) (1971), 307-317.

[46] Sen, A. K., Social choice theory: a re-examination, *Econometrica*, **45**(1) (1977), 53-89.

[47] Sen, A. K.,*Choice, welfare and measurement*, Basil Blackwell, Oxford, 1982.

[48] Subiza, B., Peris, J. E., Choice functions: rationality re-examined, *Theory and Decision*, **48** (2000), 287-304.

[49] SUZUMURA, K., Rational choice and revealed preference, *Review of Economic Studies*, **43** (1976), 149-158.

[50] SUZUMURA, K., Houthakker's axiom in the theory of rational choice, *Journal of Economic Theory*, **14** (1977), 284-290.

[51] SUZUMURA, K., *Rational choice, collective decisions and social welfare*, Cambridge University Press, New Press, 1983.

[52] TYSON, CH. J., *Revealed preference analysis of boundedly rational choice*, PhD Dissertation, Stanford University, 2003.

[53] UZAWA, H., Note on preference and axioms of choice, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **8** (1957), 35-40.

[54] VINOGRADSKAYA, T. M., RUBCHINSKII, A. A. Logical forms of choice functions, *Soviet Physics Doclady, (section Cybernetics and Control Theory)* **25**(10) (1980), 812-814, ([59] angol fordítása).

[55] WAKKER, P. P., *Additive representations of preferences. A new foundation of decision analysis*, Kluwer, 1989.

[56] WILSON, R. B., The finer structure of revealed preference, *Journal of Economic Theory*, **2** (1970), 348-353.

[57] АЙЗЕРМАН, М. А., Некоторые новые задачи общей теории выбора, *Автоматика и телемеханика*, **9** (1984), 5-43. (Angol fordítása: [2]).

[58] АЙЗЕРМАН, М. А., МАЛИШЕВСКИЙ, А. В., Некоторые аспекты общей теории задачи выбора лучших вариантов, *Автоматика и телемеханика*, **2** (1981), 65-83. (Angol fordítása: [5]).

[59] ВИНОГРАДСКАЯ, Т. М., РУБЧИНСКИЙ, А. А., Логические формы функции выбора, *Доклады Академии Наук СССР*, **254**(6) (1980), 1362-1366, (Angol fordítása: [54]).

[60] ЛЕЗИНА, З. М., Манипулирование выбором вариантов (теория агенды), *Автоматика и телемеханика*, **4** (1985), 5-22, (Angol fordítása: [30]).

[61] Макаров, И. М., Виноградская, Т. М., Рубчинский, А. А. и Соколов, В.Б., *Теория выбора и принятия решений*, Наука, Москва, 1982, (Angol fordítása: [33]).